

1. Übung Anwendungen von Graphzerlegungen in Algorithmik und Logik

Abgabe: Donnerstag, 26.4.2007 zu Beginn der Vorlesung

Übungstermin: Dienstag, der 8.5.2007

**Aufgabe 1:**

5 Punkte

Ein „maximum-distance-2 dominating set“ eines Graphen  $G$  ist eine Menge  $X \subseteq V(G)$ , so dass alle Knoten  $v \in V(G)$  Abstand höchstens zwei zu einem Knoten in  $X$  haben. (D.h. jeder Knoten ist in  $X$ , hat einen Nachbarn in  $X$  oder aber einen Nachbarn mit Nachbarn in  $X$ .)

Zeigen Sie mittels dynamischer Programmierung, dass auf Bäumen ein minimales maximum-distance-2 dominating set in Polynomialzeit ausgerechnet werden kann.

**Aufgabe 2:**

5 Punkte

- (i) Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Geben Sie einen FO-Satz  $\varphi_k$  an, der genau dann in einem Graph  $G$  gilt, wenn  $G$  ein maximum-distance-2 dominating set der Größe höchstens  $k$  hat.
- (ii) Sei  $\sigma := \{E\}$ . Geben Sie eine MSO-Formel  $\varphi(X)$  mit einer freien Mengenvariablen  $X$  an, die genau dann von einer Teilmenge  $A$  der Knoten eines graphen  $G$  erfüllt wird, wenn  $A$  ein minimales maximum-distance-2 dominating set von  $G$  ist.

**Aufgabe 3:**

5 Punkte

Betrachten Sie folgende alternative Definition einer Baumzerlegung. Eine Baumzerlegung eines Graphen  $G$  ist ein Paar  $(T, (B_t)_{t \in V(T)})$ , wobei  $T$  ein Baum und  $B_t \subseteq V(G)$  für alle  $t \in V(T)$ , mit

- (1)  $\bigcup_{t \in V(T)} B_t = G$
- (2) Für alle  $v \in V(G)$  ist  $\{t \in V(T) : v \in B_t\}$  zusammenhängend in  $T$ .

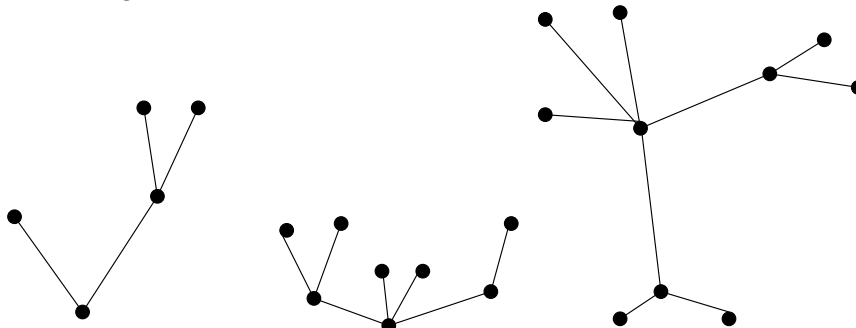
Zeigen Sie, dass beide Begriffe äquivalent sind, d.h. zum gleichen Begriff von Baumzerlegungen und Baumweite führen.

**Aufgabe 4:**

5 Punkte

Finden Sie eine Baumzerlegung minimaler Weite von ...

- (i) ... dem folgenden Wald  $W$



(ii) ... und dem folgenden Graphen  $G$ .

