

## 12. Übung Logik und Komplexität

Abgabe: Mittwoch, den 18.7.2007 zu Beginn der Vorlesung

### Aufgabe 1:

(5 Punkte)

Zeigen Sie, dass der LFP-Satz

$$\Phi := \forall x \forall y \left[ \text{Ifp}_{R,y} (y = x \vee \exists x (R(x) \wedge E(x, y))) \right] (y)$$

zu einem  $L_{\infty\omega}^3$ -Satz, aber *nicht* zu einem  $L_{\infty\omega}^2$ -Satz äquivalent ist.

*Hinweis:* Für die Nicht-Ausdrückbarkeit in  $L_{\infty\omega}^2$  können Sie Aufgabe 4 von Blatt 9 benutzen.

### Aufgabe 2:

(5 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 5.6, d.h. zeigen Sie, dass die simultane Abbildung  $\vec{F} := (F_1, \dots, F_m)$  monoton ist, falls jede der Abbildungen  $F_1, \dots, F_m$  komponentenweise monoton ist.

### Aufgabe 3:

(5 Punkte)

Zeigen Sie, dass es für jede reguläre Sprache  $L$  über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$  einen Satz  $\varphi_L$  in monadischem S-LFP über der Signatur  $\{<, P_a, P_b\}$  gibt, so dass  $\varphi_L$  die Sprache  $L$  beschreibt (im Sinne von Blatt 1/Aufgabe 2).

### Aufgabe 4:

(5 Punkte)

Beweisen Sie Korollar 5.16, d.h. zeigen Sie, dass jede Formel  $\varphi \in \text{LFP}$ , in der alle **Ifp**-Operatoren nur positiv vorkommen, äquivalent ist zu einer Formel  $\psi \in \text{LFP}$  mit nur einem **Ifp**-Operator.