Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität
Dr. Mathias Schacht

WS 2006/2007
19. Dezember 2006

Theoretische Informatik II

9. Serie

Abgabe bis 9:25 Uhr am 9. Januar

Aufgabe 1 [4 Punkte]

Seien L und L' zwei disjunkte Sprachen über dem selben Alphabet Σ, d.h. $L \cap L' = \emptyset$. Wir sagen einen Sprache R *trennt* L und L', falls $L \subseteq R$ und $L' \cap R = \emptyset$. Zeigen Sie, dass es keine entscheidbare Sprache R gibt welche die folgenden semi-entscheidbaren Sprachen trennt:

$$L = \big\{ \boldsymbol{w} \in \{0,1\}^* \colon \; M_{\boldsymbol{w}} \;\text{ hält auf Eingabe } \boldsymbol{w} \text{ mit Funktionswert } 1 \big\}$$

und

$$L' = \big\{ \boldsymbol{w} \in \{0,1\}^* \colon \; M_{\boldsymbol{w}} \;\text{ hält auf Eingabe } \boldsymbol{w} \text{ mit Funktionswert } 0 \big\}.$$

Aufgabe 2 [4 Punkte]

Ist das Post'sche Korrespondenzproblem bei einem einelementigen Alphabet entscheidbar? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 [4 Punkte]

Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Sprachen entscheidbar sind:

(a) $L = \big\{ \boldsymbol{w} \in \{0,1\}^* \mid M_{\boldsymbol{w}} \text{ hält bei jeder Eingabe} \big\}$.

(b) $L = \big\{ \boldsymbol{w} \in \{0,1\}^* \mid M_{\boldsymbol{w}} \text{ akzeptiert } \boldsymbol{x} \;\Leftrightarrow\; M_{\boldsymbol{w}} \text{ akzeptiert } \boldsymbol{x}^{\mathcal{R}} \big\}$.

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es gibt eine berechenbare Funktion $g \colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, so dass für alle $\boldsymbol{w} \in \{0,1\}^*$ die deterministischen Turingmaschinen $M_{\boldsymbol{w}}$ (beschrieben durch $\boldsymbol{w}$) und $M_{g(\boldsymbol{w})}$ (beschrieben durch $g(\boldsymbol{w})$) verschiedene Funktionen berechnen.

(b) Für jede beliebige, totale, surjektive und berechenbare Funktion $\sigma \colon \mathbb{N} \to \{0,1\}^*$ gibt es ein $i \in \mathbb{N}$, so dass $M_{\sigma(i)}$ und $M_{\sigma(i+1)}$ die selbe Funktion berechnen.

In anderen Worten: Sie sollen beweisen oder widerlegen, dass es für jede beliebige Aufzählung von Turingmaschinen $(M_{\sigma(1)}, M_{\sigma(2)}, \dots)$ zwei in der Aufzählung benachbarte Turingmaschinen ($M_{\sigma(i)}$ und $M_{\sigma(i+1)}$) gibt, welche die selbe Funktion berechnen, d.h. die zwei Turingmaschinen sind äquivalent.