Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität
Amin Coja-Oghlan

WS 2005/2006
17. Januar 2006

Theoretische Informatik II

12. Serie / Probeklausur

Abgabe bis zum 24. Januar

Diese Probeklausur entspricht in Umfang und Schwierigkeitsgrad in etwa der "echten" Klausur, für die Sie 120 Minuten Bearbeitungszeit haben werden. Gleichzeitig wird die Probeklausur als Übungsblatt gewertet. Für alle Aufgaben insgesamt gibt es 64 Punkte, von denen Sie 32 Punkte für die Übungen erhalten können. Von diesen 32 Punkten gehen wiederum 16 in die offizielle Wertung ein, die übrigen 16 sind Bonuspunkte. Die Punktzahlen, die für die Übungen gewertet werden, sind fett gedruckt. Um für die Klausur zu "üben", können Sie alle Aufgabenteile der Probeklausur bearbeiten und abgeben; in diesem Fall werden auch alle Aufgabenteile korrigiert.

Aufgabe 1 [5+**3**+**4** Punkte]

a. Geben Sie die Definition des Begriffes *regulärer Ausdruck* an.

b. Konstruieren Sie eine Typ-3-Grammatik, die dieselbe Sprache erzeugt wie der reguläre Ausdruck $(10)|((0|(11))0^*1)$.

c. Konstruieren Sie einen DFA, der die Sprache akzeptiert, welche durch den regulären Ausdruck $01\Big(((10)^*|(111))^*|0\Big)^*1$ beschrieben ist.

Aufgabe 2 [2+5+**4** Punkte]

a. Geben Sie die Definition des Begriffes *kontextfreie Grammatik* an (ohne Berücksichtigung der ε-Sonderregel).

b. Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ der Kellerautomat mit $Z = \{z_0\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{\#, A\}$, dessen Überführungsfunktion δ genau die Übergänge

$$z_0 0\# \to z_0 A\#, \qquad z_0 0A \to z_0 AA,$$
$$z_0 1A \to z_0 \varepsilon, \qquad z_0 \varepsilon\# \to z_0 \varepsilon$$

zuläßt. Welche der folgenden Wörter akzeptiert M:

$$x_1 = 001011, \quad x_2 = 001, \quad x_3 = 011, \quad x_4 = 0110, \quad x_5 = 101100 \quad ?$$

c. Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik, die die von M akzeptierte Sprache $N(M)$ erzeugt, und leiten Sie damit das Wort 0011 ab.

Aufgabe 3 [4+**6** Punkte]

a. Unter welchen der folgenden Operationen ist die Klasse der kontextfreien Sprachen abgeschlossen?

- Vereinigung ($L_1 \cup L_2$).
- Komplementbildung ($\bar{L}$).
- Produktbildung ($L_1 L_2 = \{vw : v \in L_1, w \in L_2\}$).
- Sternbildung ($L^* = \{w_1 \dots w_n : w_1, \dots, w_n \in L,\ n \geq 0\}$).

b. Zeigen Sie, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen nicht unter den folgenden Operationen abgeschlossen ist:

- $L_1 \triangle L_2 = (L_1 \setminus L_2) \cup (L_2 \setminus L_1)$ (die *symmetrische Differenz* von L_1 und L_2).
- $Perm(L) = \{w \in \Sigma^* | w$ ist eine Permutation eines Wortes $v \in L\}$. Dabei ist eine *Permutation* von v ein Wort, das durch Vertauschen der Reihenfolge der Buchstaben von v entsteht (z.B. ist *banane* Permutation von *aabenn*).

Aufgabe 4 [4+1+**3**+**4** Punkte]

a. Geben Sie die Definition des Begriffes *Kuroda-Normalform* an.

b. Gibt es zu jeder Typ-0-Sprache L eine Grammatik G in Kuroda-Normalform, die L erzeugt?

c. Konstruieren Sie eine Typ-0-Grammatik, die die Sprache $L = \{a^n b^{2n} c^n : n \geq 0\}$ erzeugt.

d. Konstruieren Sie eine Typ-0-Grammatik, die die Sprache $L' = \{a^{2^i} : i \geq 1\}$ erzeugt.

Aufgabe 5 [4+**4** Punkte]

a. Was besagt der *Satz von Rice*?

b. Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar?

- $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* : T(M_w) = \emptyset\}$.
- $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* : T(M_w)$ ist Typ-2-Sprache$\}$.
- $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* : T(M_w)$ ist Typ-1-Sprache$\}$.
- $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* : T(M_w)$ ist Typ-0-Sprache$\}$.

Aufgabe 6 [3+4+**4** Punkte]

a. Geben Sie die Definition des Begriffes *NP-vollständig* an.

b. Welche der folgenden Probleme sind NP-vollständig (unter der Annahme P$\neq$NP)?

- Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit $n = \#V$. Gibt es einen Kreis in G, der jeden Knoten in V genau einmal durchläuft?
- Gegeben sei eine aussagenlogische Formel ϕ über Booleschen Variablen $x_1, \dots, x_n$ und eine Belegung $A : \{x_1, \dots, x_n\} \to \{0, 1\}$. Erfüllt die Belegung A die Formel ϕ?
- Gegeben sei eine aussagenlogische Formel ψ, deren Klauseln jeweils die Länge ≤ 3 haben. Hat ψ eine erfüllende Belegung?
- Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ und zwei Knoten s und t. Ist t von s aus erreichbar?

c. Zeigen Sie: wenn es einen Polynomzeitalgorithmus A gibt, der für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ entscheidet, ob G eine Clique der Größe $\geq \#V/2$ hat, so gilt P=NP.