INSTITUT FÜR INFORMATIK
ALGORITHMEN UND KOMPLEXITÄT
DR. ANUSCH TARAZ

WS 2001/2002
4. DEZEMBER 2001

Theoretische Informatik II

8. Serie

Abgabe bis zum 12. Dezember

Aufgabe 29 [5 Punkte]

a. Die Goldbachsche Vermutung lautet: Jede gerade Zahl größer 3 ist die Summe zweier Primzahlen. Es ist unbekannt, ob diese Vermutung richtig ist.

   1. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion f berechenbar ist:

$$f(n) := \begin{cases} 1, \text{ falls die Goldbachvermutung stimmt} \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

   2. Beschreiben Sie informell eine TM, die genau dann eine 1 ausgibt, wenn die Goldbachvermutung falsch ist.

b. Gegeben seien unendlich viele Sprachen $L_1, L_2, \ldots$ von Typ 0 über Σ. Ist die Sprache $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ von Typ 0?

Aufgabe 30 [5 Punkte]

Sei $\Sigma \subset \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ein durch $<$ geordnetes Alphabet. Die lexikographische Ordnung auf Σ^* ist dann durch

$$x < y :\leftrightarrow \begin{cases} |x| < |y| & \text{oder} \\ |x| = |y|,\ x_1 \cdots x_{i-1} = y_1 \cdots y_{i-1} \text{ und } x_i < y_i \text{ für ein } i \leq |x| \end{cases}$$

definiert. Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ heißt *in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar*, falls $A = \emptyset$ oder falls es eine Turing-berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit Wertebereich A gibt, so dass $f(x) \leq f(y)$, falls $x < y$. Zeigen Sie:

a. A ist genau dann in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar, wenn A entscheidbar ist.

b. Jede unendliche, rekursiv aufzählbare Menge besitzt eine unendliche entscheidbare Teilmenge. (Hinweis: Konstruieren Sie eine Teilmenge, die in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar ist.)

Aufgabe 31 [5 Punkte]

Erstellen Sie deterministische Turingmaschinen zur Berechnung der folgenden Funktionen:

a. Zu einer Zahl $a \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ sei $f_a(n)$ der Rest von n bei Division durch a.

b. $h(n) = \lceil \log_2(n) \rceil$.

Die Codierung der Zahlen erfolge dabei binär.

Aufgabe 32 [5 Punkte]

a. Beschreiben Sie informell, wie man einen Kellerautomaten als eingeschränkte Turingmaschine auffassen kann.

b. Unter einer *deterministischen* 2*–Kellermaschine* verstehen wir eine deterministische Turingmaschine mit schreibgeschütztem Eingabeband und zwei Speicherbändern. Bewegt sich ein Kopf auf einem dieser Bänder nach links, so muss er zuvor $\Box$ schreiben.

   Begründen Sie informell, daß eine beliebige einbändige Turingmaschine durch eine deterministische 2–Kellermaschine simuliert werden kann.

c. Eine k*–Zählermaschine* ist eine Turingmaschine mit schreibgeschütztem Eingabeband und k Speicherbändern. Das Bandalphabet der Speicherbänder besteht nur aus zwei Zeichen, $\#$ und $\Box$. Das Symbol $\#$, das als Markierung für das untere Ende eines Kellers dient, erscheint anfangs in dem vom Kopf gelesenen Feld (eines Speicherbandes) und darf niemals an irgendeiner anderen Stelle auftauchen.

   Zeigen Sie, daß eine 4–Zählermaschine eine beliebige Turingmaschine simulieren kann.

   Hinweis: Versuchen Sie, Aufgabenteil c auf Teil b zurückzuführen.

   Bemerkung: Es genügt, die Konstruktionen mit Worten zu beschreiben; es ist nicht notwendig, explizit die geforderten Maschinen anzugeben (was Sie freilich nicht davon enthebt, korrekt zu formulieren und zu folgern).