Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität
Dozent: Dr. Mathias Schacht

SS 2009
12. Juni 2009

Graphen und Algorithmen 2

8. Serie

Abgabe bis zum 19. Juni *vor* der Übung

Aufgabe 1 [4 Punkte]

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung:
Für alle $d > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein n_0, so dass für jedes gerade $n > n_0$ gilt: Sei G ein Graph auf $n > n_0$ Knoten mit Dichte d und Minimalgrad $\delta(G) \geq dn/2$, der ferner höchstens $d^4n^4 + \varepsilon n^4$ Kreise der Länge 4 enthält. Dann besitzt G auch ein perfektes Matching.

Aufgabe 2 [2 Punkte]

Es sei $\mathcal{F}_k$ die Menge aller Graphen auf k Knoten. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- Angenommen G_n enthalte $d^{|E_F|}n^{1001} + o(n^{1001})$ viele markierte Kopien eines jeden Graphen $F \in \mathcal{F}_{1001}$. Dann enthält G auch $d^{|E_F|}n^{203} + o(n^{203})$ markierte Kopien eines jeden Graphen $F \in \mathcal{F}_{203}$.
- Angenommen G_n enthalte $d^{|E_F|}n^{17} + o(n^{17})$ viele markierte Kopien eines jeden Graphen $F \in \mathcal{F}_{17}$. Dann enthält G auch $d^{|E_F|}n^{203} + o(n^{203})$ markierte Kopien eines jeden Graphen $F \in \mathcal{F}_{203}$.

Aufgabe 3 [4 Punkte]

Sei (G_n) eine Folge d-regulärer Graphen und $\lambda_1(G_n), \dots, \lambda_n(G_n)$ mit $\lambda_1(G_n) \geq |\lambda_2(G_n)| \cdots \geq |\lambda_n(G_n)|$ die Eigenwerte von G_n. Zeigen Sie, dass für alle $S, T \subset V(G_n)$ gilt:

$$\left| |E(S,T)| - \frac{d|S||T|}{n} \right| \leq |\lambda_2(G_n)| \sqrt{|S||T|}$$

(Hinweis: Betrachten Sie $1_S A_G 1_T$ und stellen Sie 1_S und 1_T in eine spezielle Basis dar.)

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Sei G ein kantenmaximaler K_k-freier Graph auf n Knoten. Zeigen Sie, dass G eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 5 [2 Punkte]

Sei G ein Graph mit Dichte $d + \varepsilon$. Zeigen Sie die Existenz einer Menge $U \subset V(G)$ mit $|U| \geq \varepsilon n/3$ derart, dass $\delta(G[U]) \geq d|U|$.