

## Graphen und Algorithmen 2

### 4. Serie

Abgabe bis zum 22. Mai vor der Übung

#### Aufgabe 1

[5 Punkte]

Seien  $p, \varepsilon \in (0, 1)$  und  $\mathcal{G}(n, n, p)$  der zufällige bipartite Graph auf den Partitionsklassen  $X \dot{\cup} Y$  mit  $|X| = |Y| = n$ . Für einen bipartiten Graphen  $G = (X \dot{\cup} Y, E)$  und zwei beliebige Mengen  $X' \subset X$  und  $Y' \subset Y$  bezeichne ferner  $d(X', Y') := |E_G(X', Y')| / (|X'| |Y'|)$  die Dichte des induzierten Untergraphen. Zeigen Sie, dass für  $\mathcal{G}(n, n, p)$  asymptotisch fast sicher folgendes gilt:

- (a)  $|d(X, Y) - p| < \varepsilon$ ,
- (b)  $|d(X, Y) - d(X', Y')| < \varepsilon$  für alle  $X' \subseteq X$ ,  $|X'| > \varepsilon n$  und  $Y' \subseteq Y$ ,  $|Y'| > \varepsilon n$ .

Hinweis: Benutzen Sie die Aufgabe 4 der 2. Serie.

Kann man Teil (b) mit der Tschebyscheffschen Ungleichung (2. Moment Methode) beweisen?

#### Aufgabe 2

[4 Punkte]

- (a) Beweisen Sie, dass asymptotisch fast sicher alle Knotengrade von  $\mathcal{G}(n, 1/2)$  zwischen  $n/2 + \sqrt{2n \log n}$  und  $n/2 - \sqrt{2n \log n}$  liegen.
- (b) Was können Sie allgemein für  $\mathcal{G}(n, p)$  aussagen? Bestimmen Sie eine möglichst kleine Funktion  $f(p, n)$ , so dass asymptotisch fast sicher  $pn - f(p, n) \leq \deg(v) \leq pn + f(p, n)$  für alle  $v \in V$  gilt.

#### Aufgabe 3

[2 Punkte]

Zeigen Sie, dass jeder Graph mit  $m$  Kanten einen  $k$ -partiten Untergraphen mit mindestens  $(k-1)m/k$  Kanten enthält.

#### Aufgabe 4

[5 Punkte]

Ein Graph heißt  $k$ -erweiterbar, falls für jede Teilmenge  $S$  von  $V$  mit  $|S| = k$  und jede Teilmenge  $T \subseteq S$  es einen Knoten  $x \in V \setminus S$  gibt mit  $N(x) \cap S = T$ .

- Sei  $k \in \mathbb{N}$  gegeben. Zeigen Sie, dass eine Funktion  $p(n, k) = o(1)$  existiert, so dass  $\mathcal{G}(n, p)$  asymptotisch fast sicher  $k$ -erweiterbar ist.
- Zeigen Sie für jeden Graphen  $H$  die Existenz eines  $p = p(n, H) = o(1)$ , so dass asymptotisch fast sicher  $\mathcal{G}(n, p)$  eine induzierte Kopie von  $H$  enthält.

Was können Sie über den Schwellenwert für die Eigenschaft ‘enthält  $H$  als induzierten Untergraphen’ aussagen? Für welche Graphen  $H$  existiert ein solcher?