

## Graphen und Algorithmen 2

### 7. Serie

Abgabe bis zum 13. Juni vor der Übung

**Aufgabe 1** [2 Punkte]

Sei  $B = (X \dot{\cup} Y; E)$  ein bipartiter Graph und  $(X, Y)$  ein  $\varepsilon$ -reguläres Paar. Zeigen Sie, dass der (bipartite) Komplementgraph von  $B$  auch  $\varepsilon$ -regulär ist.

**Aufgabe 2** [4 Punkte]

Zeigen Sie, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  und genügend große  $n$  gilt. Falls  $B = (X \dot{\cup} Y; E)$  ein bipartiter Graph mit  $|X| = |Y| = n$  und  $e(B) \leq n/\log n$  ist, dann ist  $(X, Y)$  ein  $\varepsilon$ -reguläres Paar.

**Aufgabe 3** [4 Punkte]

Sei  $B = (X \dot{\cup} Y; E)$  ein bipartiter Graph,  $(X, Y)$  ein  $(\varepsilon, d)$ -reguläres Paar mit  $d > 0$  und  $|X| = |Y| = n$ . Zeigen Sie, dass für jedes  $p > 0$  mit Wahrscheinlichkeit  $1 - o(1)$  ein zufälliger Untergraph von  $B$ , wobei Kanten aus  $E(B)$  unabhängig mit Wahrscheinlichkeit  $p$  im zufälligen Untergraphen enthalten sind,  $(2\varepsilon, dp)$ -regulär ist.

**Aufgabe 4** [6 Punkte]

Sei  $B = (X \dot{\cup} Y; E)$  ein bipartiter Graph mit  $d = e(B)/(|X||Y|)$  und  $|X| = |Y| = n$ .

- (i) Zeigen Sie, dass die Anzahl der markierten  $C_4$  in  $B$  mindestens  $(1 - o(1))d^4n^4$  ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass die untere Schranke aus (i) scharf ist, falls  $(X, Y)$   $(\varepsilon, d)$ -regulär ist. Genauer sollen Sie zeigen, dass für alle  $\gamma > 0$  und  $d > 0$  ein  $\varepsilon > 0$  und ein  $n_0$  existieren, so dass die Anzahl der markierten Kreise der Länge 4 in einem  $(\varepsilon, d)$ -regulären Paar  $(X, Y)$  mit  $|X| = |Y| = n \geq n_0$  höchstens  $(1 + \gamma)d^4n^4$  ist.