

## Graphen und Algorithmen 2

### 5. Serie

Abgabe bis zum 30. Mai *vor* der Übung

#### Aufgabe 1

[4 Punkte]

Zeigen Sie für jedes  $k \geq 2$ , dass der Turángraph  $T_{n,k-1}$  der einzige  $K_k$ -freie Graph mit  $\mathbf{ex}(n, K_k)$  vielen Kanten ist.

#### Aufgabe 2

[8 Punkte]

Für eine Familie von Graphen  $\mathcal{F}$  sei  $\mathbf{Forb}_n(\mathcal{F})$  die Menge aller Graphen mit  $n$  Knoten, die kein  $F \in \mathcal{F}$  als Untergraphen enthalten und sei  $\mathbf{ex}(n, \mathcal{F}) = \max\{e(G) : G \in \mathbf{Forb}_n(\mathcal{F})\}$ .

- (i) Bestimmen Sie  $\mathbf{ex}(n, \mathcal{C})$  für die Familie aller Kreise  $\mathcal{C}$ .
- (ii) Bestimmen Sie  $\mathbf{ex}(n, P_3)$  für den Pfad mit 3 Kanten.
- (iii) Bestimmen Sie  $\mathbf{ex}(n, K_{1,k})$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .
- (iv) Zeigen Sie, dass  $\mathbf{ex}(n, T) \leq (|V(T)| - 2)n$  für jeden Baum  $T$ .

#### Aufgabe 3

[4 Punkte]

Die obere Kantendichte eines *unendlichen* Graphen  $G$  ist das Infimum aller reellen Zahlen  $\alpha$ , so dass die endlichen Untergraphen  $H \subseteq G$  mit  $e(H)/\binom{|V(H)|}{2} > \alpha$  beschränkte Ordnung haben. Zeige, dass diese Zahl stets in  $\{0\} \cup \{1/k : k \in \mathbb{N}\}$  liegt.