

Graphen und Algorithmen 2

3. Serie

Abgabe bis zum 16. Mai *vor* der Übung

Aufgabe 1 [4 Punkte]

Zeigen Sie, dass es für jeden Graphen H eine Funktion $p = p(n)$ mit $p(n) = o(1)$ und $\mathbb{P}(G(n, p) \text{ enthält eine induzierte Kopie von } H) = 1 - o(1)$ gibt.

Aufgabe 2 [4 Punkte]

Finden Sie für jedes $k \in \mathbb{N}$ den Schwellenwert für die Eigenschaft $\Delta(G) \geq k$.

Aufgabe 3 [4 Punkte]

Seien X und Y Zufallsvariablen. Beweisen Sie

(i) $\mathbf{Cov}(X, Y)^2 \leq \mathbf{Var}(X) \mathbf{Var}(Y)$;

(ii) $\sqrt{\mathbf{Var}(X + Y)} \leq \sqrt{\mathbf{Var}(X)} + \sqrt{\mathbf{Var}(Y)}$.

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Sei X eine Zufallsvariable und $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in [0, 1]$ gilt $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$. Dann gilt $\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}[X])$.