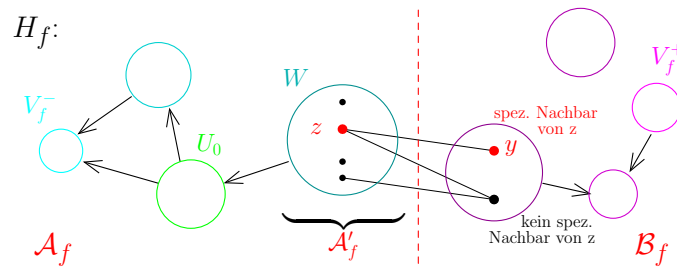


Seminar:

Graphentheorie und Kombinatorik

Dozent: Mathias Schacht
Humboldt-Universität zu Berlin
Sommersemester 2007



Gleichmäßige Färbungen von Graphen

Berit Grubien

8. November 2007

1 Einleitung

Der folgende Inhalt basiert auf dem Artikel „A Short Proof of the Hajnal-Szemerédi Theorem on Equitable Colouring“ von H.A. Kierstead und A.V. Kostochka [1]. Der Artikel beinhaltet einen Beweis des Hajnal-Szemerédi-Theorems über gleichmäßige Färbungen und die Laufzeitanalyse eines daraus abgeleiteten Polynomialzeitalgorithmus.

Aber zunächst folgende grundlegende Definitionen:

Definition (k-Färbung):

Eine Abbildung $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ heißt *k-Färbung*, wenn für alle Kanten $\{u, v\} \in E(G)$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

Definition (gleichmäßige Färbung):

Eine *gleichmäßige k-Färbung* f ist eine k -Färbung, bei der sich die Größe zweier Farbklassen um maximal eins unterscheidet.

Der folgende Satz wurde bereits 1964 von Erdős [2] vermutet und 1970 von A. Hajnal und E. Szemerédi [3] bewiesen.

Theorem (Hajnal-Szemerédi):

Ein Graph G mit Maximalgrad $\Delta(G) \leq r$ hat eine gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung.

Der ursprüngliche Beweis von A. Hajnal und E. Szemerédi war recht lang und kompliziert. In [1] haben H.A. Kierstead und A.V. Kostochka nun einen kürzeren Beweis veröffentlicht. Aus diesem Artikel werde ich den Beweis des Hajnal-Szemerédi-Theorem über gleichmäßige Färbungen vorstellen.

2 Definitionen und Lemmata

Sei $r + 1$ die gewünschte Anzahl an Farbklassen eines Graphen G . Man kann davon ausgehen, dass die Anzahl der Knoten $|V(G)|$ durch $r + 1$ teilbar ist.

Lemma 1:

O.B.d.A. gilt $|V(G)| = s(r + 1)$ für ein $s \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Sei die Anzahl der Knoten nicht durch $r + 1$ teilbar. Dann lässt sie sich schreiben als $|V(G)| = s(r + 1) - p$ mit $p \in \{1, \dots, r\}$ und man kann den Graphen $G' = G + K_p$ betrachten, der sich aus der disjunkten Vereinigung von G und dem vollständigen Graphen mit p Knoten K_p ergibt. Für diesen Graphen G' gilt $\Delta(G') \leq r$ und $|V(G')| = s(r + 1)$. Wenn man nun eine beliebige gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung von G' gegeben hat und diese auf den Graphen G einschränkt, erhält man eine gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung auf G . \square

Für den eigentlichen Beweis werden einige Definitionen benötigt:

Definition (fast gleichmäßige Färbung):

Eine *fast gleichmäßige* $(r+1)$ -Färbung f ist eine $(r+1)$ -Färbung, bei der alle Farbklassen die gleiche Größe s haben, bis auf eine große Farbklasse V_f^+ der Größe $s+1$ und eine kleine Farbklasse V_f^- der Größe $s-1$.

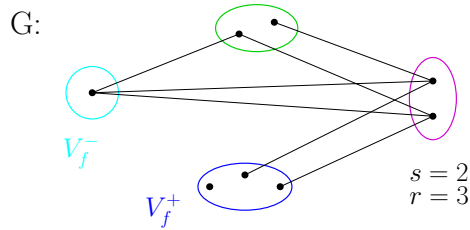


Abb. 1: Fast gleichmäßige 4-Färbung f auf dem Graphen G

Definition ($d_X(y)$):

Für einen Knoten y und eine Menge von Knoten X sei $d_X(y) := |N(y) \cap X|$ die Anzahl der Nachbarn von y , die in X liegen.

Im Folgenden werden mit U, V, W, \dots Farbklassen bezeichnet.

Definition (verschiebbar):

Ein Knoten $y \in V(G)$ heißt in eine Farbklasse W *verschiebbar*, wenn y keine Nachbarn in W hat, d.h. $d_W(y) = 0$.

Definition (Hilfsdigraph H_f):

Seien ein Graph G und eine fast gleichmäßige Färbung f gegeben, dann ist der *Hilfsdigraph* $H_f := H_f(G)$ definiert durch $V(H_f) := \{V \mid V \text{ ist Farbklasse von } G\}$ und $E(H_f) := \{(V_1, V_2) \mid V_1, V_2 \in V(H_f) \text{ und } \exists y \in V_1: N(y) \cap V_2 = \emptyset\}$

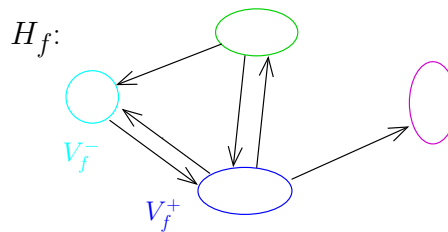


Abb. 2: Hilfsdigraph H_f von G

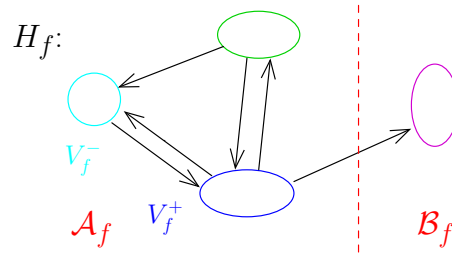
Der Hilfsdigraph H_f besitzt also genau dann eine gerichtete Kante zwischen zwei Farbklassen V_1 und V_2 , wenn ein Knoten $y \in V_1$ existiert, der nach V_2 verschiebbar ist. Somit bedeutet eine gerichtete Kante (V_1, V_2) , dass man einen Knoten aus V_1 mit der Farbe von V_2 umfärben kann.

Definition ($\mathcal{A}_f, \mathcal{B}_f, A_f, B_f$):

$\mathcal{A}_f = \mathcal{A}_f(H_f) := \{V \mid V \in V(H_f) \text{ und es ex. ein Pfad von } V \text{ nach } V_f^- \text{ in } H_f\}$

$\mathcal{B}_f = \mathcal{B}_f(H_f) := \{V \mid V \in V(H_f) \text{ und es ex. kein Pfad von } V \text{ nach } V_f^- \text{ in } H_f\}$

Weiterhin sei $A_f := \bigcup_{V \in \mathcal{A}_f} V$ und $B_f := \bigcup_{V \in \mathcal{B}_f} V$.

Abb. 3: $\mathcal{A}_f, \mathcal{B}_f$ im Hilfsdigraphen H_f **Bemerkung:**

Es gilt $|\mathcal{A}_f| + |\mathcal{B}_f| = r + 1$ und $\mathcal{A}_f \cup \mathcal{B}_f = V(G)$.

Lemma 2:

Wenn G eine fast gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung f hat mit $V_f^+ \in \mathcal{A}_f$, dann hat G eine gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung.

Beweis:

$V_f^+ \in \mathcal{A}_f$ heißt, es existiert ein Pfad $V_f^+ = V_0 V_1 \dots V_k = V_f^-$ in \mathcal{A}_f . Nun enthält die Farbklasse V_j für $j = 0, \dots, k - 1$ jeweils einen Knoten y_j , der keinen Nachbarn in V_{j+1} hat, somit kann dieser Knoten nach V_{j+1} verschoben werden. Wenn man dies für alle j getan hat, erhält man eine gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung. \square

Lemma 3:

Sei f eine fast gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung, dann gilt für jeden Knoten $y \in B_f$ $d_{B_f}(y) \leq |\mathcal{B}_f| - 1$.

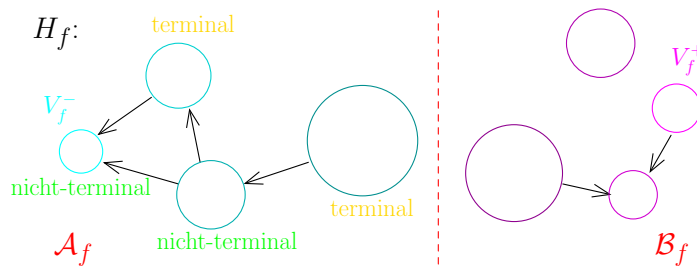
Beweis:

Wenn der Knoten y in B_f liegt, hat y zu jeder Farbklasse in \mathcal{A}_f wenigstens eine Kante, denn sonst wäre y in eine Farbklasse aus \mathcal{A}_f verschiebbar und damit die zu y gehörige Farbklasse in \mathcal{A}_f .

Somit gilt $d_{A_f}(y) \geq |\mathcal{A}_f|$ und da $d(y) = d_{A_f}(y) + d_{B_f}(y) \leq r = |\mathcal{A}_f| + |\mathcal{B}_f| - 1$ folgt $d_{B_f}(y) \leq |\mathcal{A}_f| + |\mathcal{B}_f| - 1 - d_{A_f}(y) \leq |\mathcal{B}_f| - 1$. \square

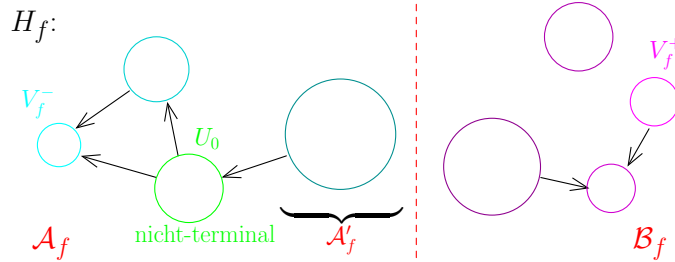
Definition (terminale Farbklasse):

Eine Farbklasse $U \in \mathcal{A}_f$ heißt *terminal*, wenn V_f^- von jeder Farbklasse $W \in \mathcal{A}_f \setminus \{U\}$ im Digraphen $H_f - U$ aus erreichbar bleibt, sonst heißt $U \in \mathcal{A}_f$ *nicht-terminal*.

Abb. 4: Terminale und nicht-terminale Farbklassen in \mathcal{A}_f

Definition ($U_0, \mathcal{A}'_f, \mathcal{A}'_f$):

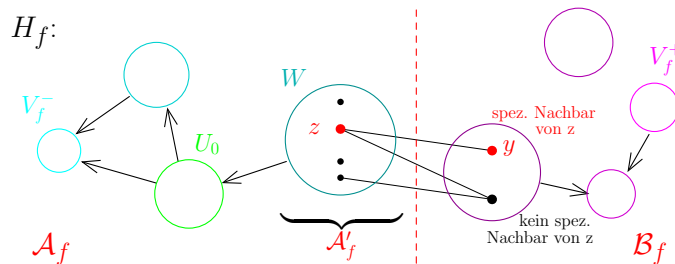
Man wähle eine beliebige nicht-terminale Farbklasse U_0 so, dass die Anzahl der Farbklassen, von denen aus man V_f^- nicht mehr erreichen kann, minimal ist. Es sei $\mathcal{A}'_f = \mathcal{A}'_f(U_0) := \{V \in \mathcal{A}_f \mid \text{es ex. kein Pfad von } V \text{ nach } V_f^- \text{ in } H_f - U_0\}$ und $\mathcal{A}'_f = \mathcal{A}'_f(U_0) := \bigcup_{V \in \mathcal{A}'_f} V$.

Abb. 5: U_0 und \mathcal{A}'_f im Hilfsdigraphen H_f **Bemerkung:**

In \mathcal{A}'_f sind alle Farbklassen terminal, sonst wurde U_0 nicht richtig gewählt.

Definition (spezieller Nachbar):

Sei ein Knoten $z \in W \in \mathcal{A}'_f$ gegeben. Ein Knoten $y \in B_f$ heißt *spezieller Nachbar* von z , wenn $N_W(y) = \{z\}$.

Abb. 6: Spezieller Nachbar von z **Lemma 4:**

- Wenn die Farbklasse V_f^+ in B_f liegt, dann existiert ein Knoten $z \in W \in \mathcal{A}'_f$,
- der einen speziellen Nachbarn y_1 hat und in eine Farbklasse aus $\mathcal{A}_f \setminus W$ verschiebbar ist, oder
 - der zwei nicht adjazente spezielle Nachbarn y_1, y_2 in B_f hat.

Der Beweis von Lemma 4 wird in Abschnitt 4 skizziert. Zunächst wird das Theorem mit Hilfe der bereits aufgeführten Lemmata bewiesen.

3 Beweis

Der Beweis wird zwei ineinander geschachtelte vollständige Induktionen beinhalten.

Beweis (Hajnal-Szemerédi):**Vollständige Induktion (1) über $|E(G)|$:**

Induktionsanfang (1):

Für $|E(G)| = 0$ gilt das Hajnal-Szemerédi-Theorem trivialerweise.

Induktionsschritt (1):

Es gelte für den Maximalgrad von G : $\Delta(G) \leq r$.Wenn man eine Kante $\{x, y\}$ aus G entfernt, gilt $\Delta(G - \{x, y\}) \leq r$. Somit kann man die Induktionsvoraussetzung (1) anwenden und $G - \{x, y\}$ erhält eine gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung.

Es können nun 2 Fälle eintreten:

1. x und y haben verschiedene Farben:

Dann kann man die Kante wieder einfügen und ist fertig.

2. x und y haben die gleiche Farbe:

Da $d(x) \leq r$ und die Kante $\{x, y\}$ zwei Knoten der gleichen Farbe verbindet, kann man x in eine andere Farbklasse verschieben. Man erhält eine fast gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung f .**Vollständige Induktion (2) über $|\mathcal{B}_f|$:**

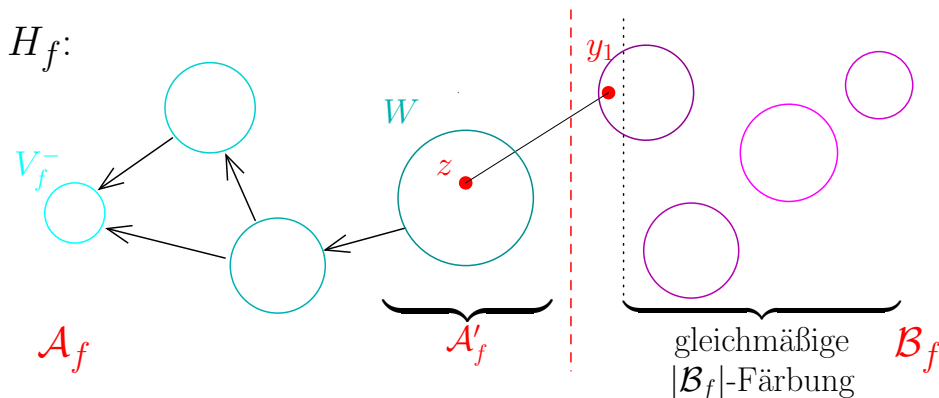
Induktionsanfang (2):

Wenn $|\mathcal{B}_f| = 0$ ist, muss $V_f^+ \in \mathcal{A}_f$ sein. Mit Lemma 1 folgt dann die Existenz einer gleichmäßigen $(r + 1)$ -Färbung.

Induktionsschritt (2):

Wenn $V_f^+ \in \mathcal{A}_f$ folgt die Induktionsbehauptung wieder mit Lemma 1.Sei also $V_f^+ \in \mathcal{B}_f$. Es lässt sich Lemma 3 anwenden, womit ein Knoten $z \in W \in \mathcal{A}'_f$ existiert, der

- a) einen speziellen Nachbarn y_1 hat und in eine Farbklasse $X \in \mathcal{A}_f \setminus W$ verschiebbar ist, oder
- b) zwei nicht adjazente spezielle Nachbarn y_1, y_2 in B_f hat.

In beiden Fällen hat z einen speziellen Nachbarn y_1 . Man betrachte zunächst den induzierten Teilgraphen auf $B_f \setminus \{y_1\}$. Nach Lemma 2 gilt $d_{B_f}(y) \leq |\mathcal{B}_f| - 1$ für jeden Knoten $y \in B_f \setminus \{y_1\}$. Damit kann man auf diesem Teilgraphen die Induktionsvoraussetzung (1) anwenden und erhält eine gleichmäßige $|\mathcal{B}_f|$ -Färbung.Abb. 7: Gleichmäßige $|\mathcal{B}_f|$ -Färbung auf dem induzierten Teilgraphen

Im Fall a) kann man nun z in die Farbklasse X verschieben, und seinen speziellen Nachbarn y_1 in die Farbklasse $W \setminus \{z\}$. Man erhält eine neue Färbung, die eine fast gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung ist. Da W in \mathcal{A}_f terminal war, d.h. V_f^- von allen anderen Farbklassen aus $\mathcal{A}_f \setminus \{W\}$ erreichbar gewesen ist, war V_f^- u.a. von X aus erreichbar, also ist V_f^- jetzt auch in der neuen Färbung von $X \cup \{z\}$ aus erreichbar. Nun kann man Lemma 1 anwenden und erhält eine gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung.

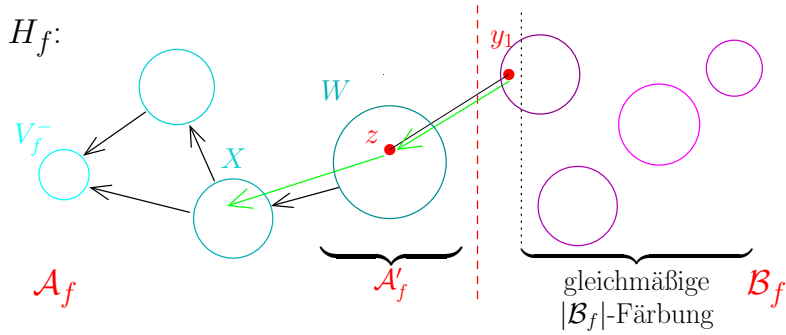


Abb. 8: Verschiebung von Knoten im Fall a)

Im Fall b) reicht es davon auszugehen, dass z nicht in eine andere Farbklasse geschoben werden kann. Wenn das der Fall ist, hat z zu jeder der Farbklassen aus $\mathcal{A}_f \setminus \{W\}$ eine Kante, somit gilt $d_{\mathcal{A}_f}(z) \geq |\mathcal{A}_f| - 1$, also $d_{\mathcal{A}_f \cup \{y_1\}}(z) \geq |\mathcal{A}_f|$. Es folgt $d_{\mathcal{B}_f \setminus \{y_1\}}(z) \leq |\mathcal{B}_f| - 1$. Daher existiert eine Farbklasse $Y \in \mathcal{B}_f$, in die z verschiebbar ist. Man verschiebe z in diese Farbklasse Y und den speziellen Nachbarn y_1 in die Farbklasse $W \setminus \{z\}$.

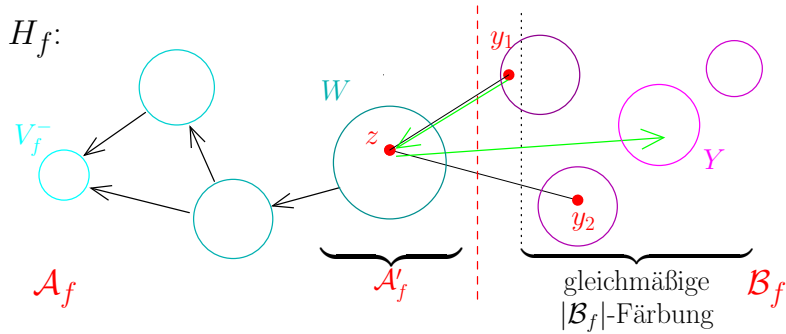
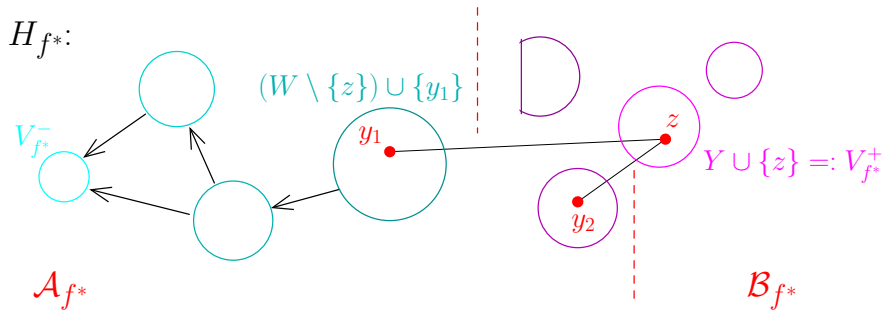


Abb. 9: Verschiebung von Knoten im Fall b)

Es ergibt sich eine neue fast gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung f^* , wobei $V_{f^*}^+ = Y \cup \{z\}$ die neue große Farbklasse ist.

Für f^* gilt nun $|\mathcal{B}_{f^*}| < |\mathcal{B}_f|$, denn

- alle Farbklassen aus $\mathcal{A}_f \setminus \{W\}$ sind auch in \mathcal{A}_{f^*} enthalten.
- $(W \setminus \{z\}) \cup \{y_1\}$ ist ebenfalls in \mathcal{A}_{f^*} enthalten, da z ohnehin nicht in eine Farbklasse aus $\mathcal{A}_f \setminus \{W\}$ verschoben werden konnte.
- Weiterhin ist die Farbklasse, die y_2 enthält, in \mathcal{A}_{f^*} enthalten. Denn y_2 hatte nur eine Kante nach W , nämlich die zu z , und y_2 ist nicht adjazent zu y_1 . Folglich ist y_2 in die Farbklasse $(W \setminus \{z\}) \cup \{y_1\}$ verschiebbar.

Abb. 10: Neue Färbung f^* mit $|\mathcal{B}_{f^*}| < |\mathcal{B}_f|$

Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung (2) erhält man eine gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung des Graphen. \square

4 Anmerkungen

Lemma 3

Um Lemma 3 zu beweisen, muss man zunächst das folgende Hilfslemma zeigen.

Hilfslemma:

Wenn eine Farbklassse $W \in \mathcal{A}'_f$ existiert, so dass sich kein Knoten $z \in W$, der einen speziellen Nachbarn besitzt, in eine Farbklassse aus $\mathcal{A}_f \setminus \{W\}$ verschieben lässt, dann gilt $|\mathcal{B}_f| + 1 \leq |\mathcal{A}'_f|$ und jeder Knoten $y \in B_f$ ist ein spezieller Nachbar.

Beweisskizze (Hilfslemma):

Sei S die Menge aller Knoten aus W , die einen speziellen Nachbarn haben. Mittels $d_{B_f}(z) \leq |\mathcal{B}_f|$, $\forall z \in S$ und $d_{B_f}(x) \leq |\mathcal{A}'_f| + |\mathcal{B}_f|$, $\forall x \in W$ kann man die Anzahl der Kanten zwischen W und B_f abschätzen. Dabei muss man für die obere Schranke die zu Knoten aus W inzidenten Kanten, für die untere Schranke die zu Knoten aus B_f inzidenten Kanten zählen und die spezieller-Nachbar-Eigenschaft ausnutzen. Man erhält

$$2 \cdot (|\mathcal{B}_f| \cdot |W| + 1) - |\mathcal{B}_f| \cdot |S| \leq |E(W, B_f)| \leq |\mathcal{B}_f| \cdot |W| + |\mathcal{A}'_f| \cdot |W \setminus S|.$$

Damit folgt $|\mathcal{B}_f| + 1 \leq |\mathcal{A}'_f|$.

Weiterhin ist die Anzahl der Farbklassen in \mathcal{A}_f mit mehr als einem Nachbarn von $y \in B_f$ höchstens $d(y) - |\mathcal{A}_f| - d_B(y)$. Dadurch erhält man für die Menge der Knoten $S^y := \{z \in W \in \mathcal{A}'_f \mid W \text{ beliebig, } z \text{ hat den speziellen Nachbarn } y\}$, dass sie eine Kardinalität von mindestens $|\mathcal{A}'_f| - |\mathcal{B}_f| + 1 + d_{B_f}(y)$ hat. Mit obigem folgt dann, dass jeder Knoten $y \in B_f$ ein spezieller Nachbar ist. \square

Beweisskizze (Lemma 3):

Man nimmt an, dass jeder Knoten z , der einen speziellen Nachbarn y_1 hat, nicht in eine Farbklassse aus $\mathcal{A}_f \setminus \{W\}$ verschiebbar ist und jeder weitere spezielle Nachbar

y_2 adjazent zu y_1 ist. Damit bilden die speziellen Nachbarn eine Clique. Wenn man nun das Hilfslemma anwendet und eine Gewichtsfunktion μ mit

$$\mu(x, y) = \begin{cases} \frac{|\mathcal{B}_f|}{\text{Anzahl spez. Nachbarn von } x}, & \text{falls } y \text{ spez. Nachbar von } x \text{ ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

auf den Kanten zwischen A'_f und B_f einführt, lässt sich

$$\mu(A'_f, B_f) = \sum_{x \in A'_f, y \in B_f} \mu(x, y)$$

einmal von oben und einmal von unten abschätzen, was den Widerspruch liefert. \square

Polynomialzeitalgorithmus

Ein Polynomialzeitalgorithmus für gleichmäßige Färbungen wurde zuerst von M. Mydlarz und E. Szemerédi gefunden. Kurze Zeit später haben H.A. Kierstead und A.V. Kostochka in ihrem hier betrachteten Artikel ebenfalls einen Polynomialzeitalgorithmus angegeben, der auf ihrem Beweis aufbaut.

Dazu werden zunächst sämtliche Kanten aus dem Graphen entfernt und trivialerweise eine gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung bestimmt. In jedem folgenden Schritt i werden alle zu einem Knoten v_i inzidenten Kanten hinzugefügt und der Knoten v_i gegebenenfalls so verschoben, dass man eine fast gleichmäßige Färbung erhält. Aus dieser kann man, wie im Beweis, durch Unterscheiden der 2 Fälle eine gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung konstruieren.

Induktiv über $|\mathcal{B}_f|$ wird bewiesen, dass das in $c(|\mathcal{B}_f| + 1)n^3$ Schritten möglich ist. Dabei ist insbesondere das Hilfslemma von Bedeutung.

Damit findet der Algorithmus eine gleichmäßige $(r + 1)$ -Färbung in einer Laufzeit von $O(n^5)$.

Literatur

- [1] A.V. KOSTOCHKA, H.A. KIERSTEAD : *A Short Proof of the Hajnal-Szemerédi Theorem on Equitable Colouring*. In: *Combinatorics, Probability and Computing*. Cambridge University Press, 2007.
- [2] ERDŐS, P.: *Problem 9*. In: *Theory of Graphs and Its Applications*, Seite 159, Prag, 1964. Czech. Acad. Sci. Publ.
- [3] E. SZEMERÉDI, A. HAJNAL : *Proof of a conjecture of P. Erdős*. In: V.T. SÓS, EDS. P. ERDŐS A. RÉNYI (Herausgeber): *Combinatorial Theory and its Application*, Seiten 601–623, Nord-Holland, London, 1970.