Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität
Dr. Till Nierhoff

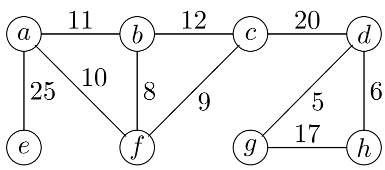
WS 2002/03
29. Januar 2003

Theoretische Informatik II

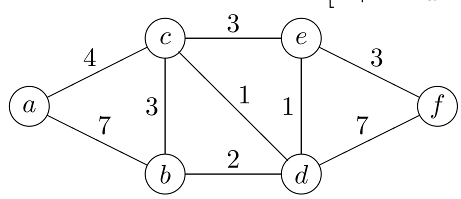
13. Serie

Abgabe bis zum 5. Februar 2003

Aufgabe 49 [4+4 Punkte]



zu a)



zu b)

a) Bestimmen Sie anhand des Algorithmus von Prim einen MST im gegebenen Graphen.

b) Ermitteln Sie mit dem Algorithmus von Dijkstra im gegebenen Graphen die Abstände aller Knoten von a.

Geben Sie bei beiden Aufgaben die einzelnen Schritte an.

Aufgabe 50 [8 Punkte]

Sei $G = (V, E)$ mit $w : E \to \mathbb{R}^+$ ein kantengewichteter Graph.
Ein kürzester Kreis in G ist ein Kreis C, der $w(C) := \sum_{e \in E(C)} w(e)$ minimiert.

Formulieren Sie einen Algorithmus, der einen kürzesten Kreis findet, und beweisen Sie seine Korrektheit. Die Laufzeit sollte $O(n^4)$ nicht überschreiten (mit kurzer Begründung).

Aufgabe 51 [10 Punkte]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Kanten-Kapazitätsfunktion $c : E \to \mathbb{R}^+$.
Für jeden Pfad P in G sei seine Kapazität $c(P) := \min_{e \in E(P)} c(e)$.

Formulieren Sie einen Algorithmus, der zu einem gegebenen Knoten s für alle anderen Knoten v die maximale Kapazität eines s-v-Pfades findet. Beweisen Sie seine Korrektheit. Die Laufzeit sollte $O(n^2)$ nicht überschreiten (mit kurzer Begründung).

Aufgabe 52 [4+3+3+4 Punkte]

Sei $G = ([n], E)$ ein Graph.
Definitionen:
Eine Knotenmenge $S \subseteq V$ heißt *stabil* in G, falls $E \cap \binom{S}{2} = \emptyset$.
Gibt es keine stabile Menge S' mit $|S'| > |S|$, so ist S eine *größte* stabile Menge.
Der *Maximalgrad* von G ist $\Delta(G) := \max\limits_{v \in V} d(v)$.

Der Greedy-Algorithmus zur Findung einer möglichst großen stabilen Menge S geht folgendermaßen vor:

Input: $G = (V, E), V = [n]$
Output: S
(1) $S \leftarrow \emptyset$
(2) **while** $V \neq \emptyset$
(3) $s \leftarrow \min V$
(4) $S \leftarrow S \cup \{s\}$
(5) $V \leftarrow V \setminus (\{s\} \cup \Gamma(s))$
(6) $G \leftarrow G[V]$

a) Zeigen Sie, dass dieser Greedy-Algorithmus stets eine stabile Menge S der Größe $|S| \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}$ findet.

b) Sei $0 < \Delta < n$. Geben Sie einen Graphen $G = ([k], E)$ mit $\Delta(G) = \Delta$ und $k \geq n$ an, bei dem der Greedy-Algorithmus nicht die größte stabile Menge findet.

c) Sei $0 < \Delta < n$. Geben Sie einen Graphen $G = (V, E)$ mit $\Delta(G) = \Delta$ und $|V| \geq n$ an, bei dem der Greedy-Algorithmus unabhängig von der Knotennummerierung stets eine größte stabile Menge findet.

d) Zeigen Sie: Für jeden Graphen gibt es eine Knotennummerierung, sodass der Greedy-Algorithmus eine größte stabile Menge findet.