Institut für Informatik
Algorithmen und Komplexität
Dr. Till Nierhoff

WS 2002
23. Oktober 2002

Theoretische Informatik II

2. Serie — korrigiert

Abgabe bis zum 30. Oktober 2002

Aufgabe 5 [8 Punkte]

Zeigen Sie, dass das Intervall $[0,1]$ überabzählbar ist. Führen Sie dazu die Annahme zum Widerspruch, es gäbe eine abzählbare Aufzählung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1.
Hinweis: Untersuchen Sie die Binärdarstellung der Zahlen dieser Aufzählung. Sei x_i das i-te Bit der i-ten Zahl der Aufzählung. Betrachten Sie nun jene Zahl, deren i-tes Bit die Negation von x_i ist.

Aufgabe 6 [16 Punkte]

Die sogenannte „Groß-O-Notation“ ist folgendermaßen definiert:
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine zahlentheoretische Funktion.
Alle Funktionen, die bis auf einen konstanten Faktor höchstens so schnell wachsen wie f, sind in der folgenden Menge zusammengefasst:
$O(f) := \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists c \in \mathbb{R}^{>0},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ g(n) \leq c \cdot f(n),\ \forall n \geq n_0\}$.
Die vereinfachte Schreibweise „$g(n) = O(f(n))$“ bedeutet: $g \in O(f)$.

Prüfen Sie die Korrektheit der folgenden Aussagen und begründen Sie Ihr Urteil:

a) $3n + 4 + \log n = O(n)$

b) $\left(3n + \sqrt{n}\right)^2 = O(n^2)$

c) $\log n = O(\log(\sqrt{n}))$

d) $\log n = O(\sqrt{n})$

e) $\sum_{i=1}^{n} i^{-2} = O(1)$

f) $\sum_{i=1}^{n} i = O(n)$

g) $\frac{n - n^{3/4}}{\sqrt{n}+5} = O\left(n^{1/4}\right)$

h) $\left(1 + \frac{2}{n-4}\right)^n = O(1)$

Definition. *Für eine k-Band-Turingmaschine und ein Eingabewort x sei*

$$K_x \vdash K_1 \vdash \ldots \vdash K_t$$

eine akzeptierende Rechnung mit $K_i = (q_i, u_{i1}, v_{i1}, \ldots, u_{ik}, v_{ik})$.
Die Laufzeit dieser Rechnung ist dann t und der benötigte Platz sei

$$s = \max\{|u_{ij}| + |v_{ij}| \ : \ i = 1 \ldots t, \ j = 1 \ldots k\}.$$

Aufgabe 7 [6 Punkte]

Gegeben sei folgende 2-Band-Turingmaschine T:
$T = (\{z_a, z_e, z_0, z_1\}, \{0,1\}, \{0,1,\Box\}, \delta, z_a, \{z_e\})$, wobei δ durch folgende Übergänge definiert ist:

$$\begin{array}{ll}
(z_a, (0, \Box)) \to (z_0, (0, \Box), (R, N)), & (z_a, (1, \Box)) \to (z_e, (1, 1), (N, N)) \\
(z_0, (0, \Box)) \to (z_1, (0, \Box), (R, N)), & (z_0, (1, \Box)) \to (z_e, (1, 0), (N, N)) \\
(z_1, (0, \Box)) \to (z_0, (0, \Box), (R, N)), & (z_1, (1, \Box)) \to (z_e, (1, 1), (N, N))
\end{array}$$

a) Welche Funktion wird von T berechnet? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Welche ist die kürzeste und welche die längste Laufzeit für Eingabewörter aus $E_n = \{0^m 1 0^{n-m-1} | \ 0 \leq m \leq n-1\}$?

Aufgabe 8 [10 Punkte]

Zeigen Sie: Eine k-Band-Turingmaschine kann so durch eine 1-TM simuliert werden, dass die Simulation einer Rechnung mit Laufzeit t und Platzbedarf s eine Laufzeit von $O(t^2)$ und den Platzbedarf $O(s)$ hat.