INSTITUT FÜR INFORMATIK
ALGORITHMEN UND KOMPLEXITÄT
DR. TILL NIERHOFF

WS 2002
16. OKTOBER 2002

Theoretische Informatik II

1. Serie — korrigiert

Abgabe bis zum 23. Oktober 2002

Aufgabe 1 [3+4+3 Punkte]

Beweisen Sie die folgenden mathematischen Aussagen für $0 < a < 1$, $n \in N = \{0, 1, 2, \ldots\}$:

a) $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$
(Hinweis zu a) und b): vollständige Induktion)

b) $1 - an + \frac{a^2n^2}{2} \geq (1-a)^n \geq 1 - an$

c) $(1+a)^n \leq e^{an}$ (Hinweis: Ableitung)

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Nach der Vorlesung von Prof. Starke ist $T = (X, Z, z_0, \delta)$ eine Turing-Maschine, wenn

- X ein endliches Alphabet mit $\Box \notin X$,
- Z eine endliche Menge von Zuständen und $z_0 \in Z$ der Anfangszustand
- und $\delta : Z \times (X \cup \{\Box\}) \to (X \cup \{\Box\}) \times \{R, L, N, S\} \times Z$ die Überführungsfunktion ist.

Die erkannte Sprache dieser Maschine ist die Menge $L(T) = \{x \in X^* | \, T \text{ stoppt bei Eingabe } x\}$.

Zeigen Sie die Äquivalenz zur 1-DTM nach folgender Definition:
Eine deterministische k-Band-Turingmaschine (kurz k-DTM) wird durch ein Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ beschrieben, wobei

- Z eine endliche Menge von Zuständen und $q_0 \in Z$ der Startzustand,
- Σ das Eingabealphabet mit $\Box \notin \Sigma$,
- Γ das Arbeitsalphabet mit $\Sigma \cup \{\Box\} \subseteq \Gamma$

- $\delta : Z \times \Gamma^k \to \left(Z \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k \right) \cup \oslash$ die Überführungsfunktion

- und E die Menge der Endzustände ist.

Die Maschine M erkennt die Sprache $L = \{x \in \Sigma^* |\ M$ gelangt bei Eingabe x in einen Endzustand$\}$.

Aufgabe 3 [4+6 Punkte]

Beschreiben Sie in Worten welche Sprache die angegebene Turingmaschine M erkennt und wie sie funktioniert.

a) $M = (\{z_0, z_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \square\}, \delta, z_0, \{z_1\})$, wobei

$$\delta(z_0, a) = (z_1, b, R), \quad \delta(z_0, b) = (z_1, a, R), \quad \delta(z_0, \square) = (z_1, \square, N)$$

b) $M = (\{q, r_0, r_1, r_0^*, r_1^*, s_0, s_1, l, ja, nein\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, q, ja)$, mit der Überführungsfunktion

$\delta(z, x)$	$x = \square$	0	1
$z = q$	$ja, \square, N$	$r_0, \square, R$	$r_1, \square, R$
r_0	$ja, \square, N$	$r_0^*, 0, R$	$r_0^*, 1, R$
r_1	$ja, \square, N$	$r_1^*, 0, R$	$r_1^*, 1, R$
r_0^*	$s_0, \square, L$	$r_0^*, 0, R$	$r_0^*, 1, R$
r_1^*	$s_1, \square, L$	$r_1^*, 0, R$	$r_1^*, 1, R$
s_0		$l, \square, L$	$nein, \square, N$
s_1		$nein, \square, N$	$l, \square, L$
l	$q, \square, R$	$l, 0, L$	$l, 1, L$

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Geben Sie eine 1-TM mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{|\}$ an, die zwei unär kodierte natürliche Zahlen x und y multipliziert.

Aus der Eingabe $\underbrace{|\ldots|}_{x+1\text{-mal}} \square \underbrace{|\ldots|}_{y+1\text{-mal}}$ soll das Produkt $\underbrace{|\ldots|}_{x \cdot y+1\text{-mal}}$ erzeugt werden.

Argumentieren Sie, weshalb die von Ihnen erstellte TM ihre Aufgabe erfüllt.