Theoretische Informatik 3

Till Nierhoff

nierhoff@informatik.hu-berlin.de

Institut für Informatik

Humboldt-Universität zu Berlin

13. Mai 2003

Wh. Polynomialzeitreduktionen

THEOREM

$\textsc{Hamiltonian} \leq_{\mathcal{P}} \textsc{Tsp}$

THEOREM

$\textsc{Cnf-Sat} \leq_{\mathcal{P}} \textsc{3-Sat}$

Wh. Polynomialzeitreduktionen

THEOREM

HAMILTONIAN $\leq_{\mathcal{P}}$ TSP

THEOREM

CNF-SAT $\leq_{\mathcal{P}}$ 3-SAT

THEOREM

3-SAT $\leq_{\mathcal{P}}$ DHC

Wh. Polynomialzeitreduktionen

THEOREM

$\textsc{Hamiltonian} \leq_{\mathcal{P}} \textsc{Tsp}$

THEOREM

$\textsc{Cnf-Sat} \leq_{\mathcal{P}} 3\text{-}\textsc{Sat}$

THEOREM

$3\text{-}\textsc{Sat} \leq_{\mathcal{P}} \textsc{Dhc}$

THEOREM

$\textsc{Dhc} \leq_{\mathcal{P}} \textsc{Hamiltonian}$

THEOREM

$3\text{-}\textsc{Sat} \leq_{\mathcal{P}} \textsc{Kp}^*$

- $\phi = \bigwedge_{C \in \mathcal{C}} C$ über Variablen $x_1, \ldots, x_n \rightsquigarrow D(\phi) = (V, A)$
  - $V = [n] \cup \{1_C^{\text{in}}, 2_C^{\text{in}}, 3_C^{\text{in}}, 1_C^{\text{out}}, 2_C^{\text{out}}, 3_C^{\text{out}} \mid C \in \mathcal{C}\}$

- $(u, v) \in A \iff$
  - $u = i$, $v = k_C^{\text{in}}$, k-tes Literal von C ist erstes Vorkommen von x_i oder $\bar{x_i}$, oder
  - $u = k_C^{\text{out}}$, $v = \ell_{C'}^{\text{in}}$, k-tes Literal von C ist j-tes Vorkommen von x_i ($\bar{x_i}$) und ℓ-tes Literal von C' ist $j+1$-tes Vorkommen von x_i ($\bar{x_i}$), oder
  - $u = k_C^{\text{out}}$, $v = i + 1$, k-tes Literal von C ist letztes Vorkommen von x_i oder $\bar{x_i}$, oder
  - (u, v) ist eine interne Kante eines Gadget.

DHC $\leq_{\mathcal{P}}$ HAMILTONIAN

- $D = (V, A) \leadsto G(D) = (V_D, E_D)$
  - $V_D = \{v_{\text{in}}, v, v_{\text{out}} \mid v \in V\}$
  - $E_D = \{\{u_{\text{out}}, v_{\text{in}}\} \mid (u, v) \in A\} \cup \{\{v_{\text{in}}, v\}, \{v, v_{\text{out}}\} \mid v \in V\}$

Dhc $\leq_{\mathcal{P}}$ Hamiltonian

- $D = (V, A) \rightsquigarrow G(D) = (V_D, E_D)$
  - $V_D = \{v_{\text{in}}, v, v_{\text{out}} \mid v \in V\}$
  - $E_D = \{\{u_{\text{out}}, v_{\text{in}}\} \mid (u, v) \in A\} \cup \{\{v_{\text{in}}, v\}, \{v, v_{\text{out}}\} \mid v \in V\}$

- $G(D) \in$ Hamiltonian $\iff D \in$ Dhc

THEOREM WEGENER, KAP. 3

3-SAT $\leq_{\mathcal{P}}$ KP*

KP* $= \{(a_1, \ldots, a_n, g_1, \ldots, g_n, G, A) \in$ KP $\mid \forall i : a_i = g_i, A = G\}$

THEOREM WEGENER, KAP. 3

3-SAT $\leq_{\mathcal{P}}$ KP*

KP* $= \{(a_1, \ldots, a_n, g_1, \ldots, g_n, G, A) \in$ KP $\mid \forall i : a_i = g_i, A = G\}$

- Klauseln $C_1, \ldots, C_m$ auf Variablen $x_1, \ldots, x_n$
- $\leadsto (n + m)$-stellige Zahlen $a_i, b_i (i \in [n])$ und $b_j, c_j (j \in [m])$

THEOREM WEGENER, KAP. 3

3-SAT $\leq_{\mathcal{P}}$ KP*

$\text{KP}^* = \{(a_1, \ldots, a_n, g_1, \ldots, g_n, G, A) \in \text{KP} \mid \forall i : a_i = g_i, A = G\}$

- Klauseln $C_1, \ldots, C_m$ auf Variablen $x_1, \ldots, x_n$
- $\rightsquigarrow (n+m)$-stellige Zahlen $a_i, b_i (i \in [n])$ und $b_j, c_j (j \in [m])$
- vorderer Block (erste m Stellen): eine Stelle für Klausel j
  - a_i: #Vorkommen von x_i in C_j
  - b_i: #Vorkommen von $\bar{x_i}$ in C_j
  - c_j: 1, sonst 0
  - d_j: 2, sonst 0

THEOREM WEGENER, KAP. 3

3-SAT $\leq_{\mathcal{P}}$ KP*

$\text{KP}^* = \{(a_1, \ldots, a_n, g_1, \ldots, g_n, G, A) \in \text{KP} \mid \forall i : a_i = g_i, A = G\}$

- Klauseln $C_1, \ldots, C_m$ auf Variablen $x_1, \ldots, x_n$
- $\leadsto (n+m)$-stellige Zahlen $a_i, b_i (i \in [n])$ und $b_j, c_j (j \in [m])$
- vorderer Block (erste m Stellen): eine Stelle für Klausel j
- hinterer Block (letzte n Stellen): eine Stelle für Variable i
  - a_i: 1, sonst 0
  - b_i: 1, sonst 0
  - c_j: 0
  - d_j: 0

Transitivität

LEMMA

Die Reduktionsrelation $\leq_{\mathcal{P}}$ ist transitiv

LEMMA

Gilt $A \leq_{\mathcal{P}} B$ und $B \in \mathcal{P}$, dann $A \in \mathcal{P}$
Gilt $A \leq_{\mathcal{P}} B$ und $A \notin \mathcal{P}$, dann $B \notin \mathcal{P}$

Transitivität

LEMMA

Die Reduktionsrelation $\leq_{\mathcal{P}}$ ist transitiv

LEMMA

Gilt $A \leq_{\mathcal{P}} B$ und $B \in \mathcal{P}$, dann $A \in \mathcal{P}$
Gilt $A \leq_{\mathcal{P}} B$ und $A \notin \mathcal{P}$, dann $B \notin \mathcal{P}$

Für $A =$

- 3-SAT,
- DHC, HAMILTONIAN, TSP,
- CLIQUE, INDEPENDENTSET, VERTEXCOVER, ILP,
- KP*, KP, PART

gilt CNF-SAT $\leq_{\mathcal{P}} A$.