Theoretische Informatik 3

Till Nierhoff

nierhoff@informatik.hu-berlin.de

Institut für Informatik

Humboldt-Universität zu Berlin

10. Juni 2003

Wiederholung

- $\mathcal{P} := \{\mathrm{f} \mid \ \mathrm{f}$ in poly Zeit berechenbar$\}$
  "$\supset$" $\{\mathrm{L} \mid \ \mathrm{L}$ in poly Zeit entscheidbar$\}$
  Beispiel:
  $\textsc{Connected} := \{\mathrm{G} \mid \ \mathrm{G}$ zusammenhängender Graph$\}$

Wiederholung

- $\mathcal{P} := \{\mathrm{f} \mid \mathrm{f}$ in poly Zeit berechenbar$\}$
  "$\supset$" $\{\mathrm{L} \mid \mathrm{L}$ in poly Zeit entscheidbar$\}$
  Beispiel:
  CONNECTED $:= \{\mathrm{G} \mid \mathrm{G}$ zusammenhängender Graph$\}$

- $\mathcal{N}\mathrm{P} := \{\mathrm{L} \mid \mathrm{L}$ in poly Zeit von NTM akzeptiert$\}$
  $= \{\mathrm{L} \mid \mathrm{L}$ hat poly Zeit entscheidbare "Ja"-Zertifikate$\}$
  Beispiel: SAT

Wiederholung

- $\mathcal{P} := \{f \mid f$ in poly Zeit berechenbar$\}$
  "$\supset$" $\{L \mid L$ in poly Zeit entscheidbar$\}$
  Beispiel:
  CONNECTED $:= \{G \mid G$ zusammenhängender Graph$\}$

- $\mathcal{N}P := \{L \mid L$ in poly Zeit von NTM akzeptiert$\}$
  $= \{L \mid L$ hat poly Zeit entscheidbare "Ja"-Zertifikate$\}$
  Beispiel: SAT

- co-$\mathcal{N}P := \{\bar{L} \mid L$ in poly Zeit von NTM akzeptiert$\}$
  $= \{L \mid L$ hat poly Zeit entscheidbare "Nein"-Zertifikate$\}$
  Beispiel: PRIME $:= \{n \mid n$ Primzahl$\}$

Wh. Die Klasse $\mathcal{N}\mathrm{PO}$

$\mathcal{N}\mathrm{PO}$: Optimierungsprobleme formal (Lit.: Vazirani, App. A):

DEFINITION

$\Pi \in \mathcal{N}\mathrm{PO}$ hat

- $\mathrm{D}_\Pi \subset \Sigma^*$, Menge der Instanzen, $\mathrm{D}_\Pi \in \mathcal{P}$
- $\forall \mathrm{I} \in \mathrm{D}_\Pi : S_\Pi(\mathrm{I}) \neq \emptyset$,
  Menge der zulässigen Lösungen zu $\mathrm{I} \in \mathrm{D}_\Pi$.
- $\mathrm{obj}_\Pi : \{(\mathrm{I}, s) \mid \mathrm{I} \in \mathrm{D}_\Pi, s \in S_\Pi(\mathrm{I})\} \to \mathbb{Q}_+$, Zielfunktion
- max, min, Optimierungsziel

Approximationsalgorithmen

Π ein $\mathcal{N}\mathrm{PO}$-Problem. Zu $\mathrm{I} \in \mathrm{D}_\Pi$ sei

$$\mathrm{opt}(\mathrm{I}) := \min \text{ bzw. } \max\{\mathrm{obj}_\Pi(\mathrm{I}, s) \mid s \in S_\Pi(\mathrm{I})\}$$

$\mathrm{OPT}(\mathrm{I}) = \{s \in S_\Pi(\mathrm{I}) \mid \mathrm{obj}_\Pi(\mathrm{I}, s) = \mathrm{opt}(\mathrm{I})\}$.

Approximationsalgorithmen

Π ein $\mathcal{N}\mathrm{PO}$-Problem. Zu $\mathrm{I} \in \mathrm{D}_\Pi$ sei

$$\mathrm{opt}(\mathrm{I}) := \min \text{ bzw. } \max\{\mathrm{obj}_\Pi(\mathrm{I}, s) \mid s \in S_\Pi(\mathrm{I})\}$$

$\mathrm{OPT}(\mathrm{I}) = \{s \in S_\Pi(\mathrm{I}) \mid \mathrm{obj}_\Pi(\mathrm{I}, s) = \mathrm{opt}(\mathrm{I})\}$.

DEFINITION

Ein ρ-Approximationsalgorithmus

- ist polynomiell
- liefert zu $\mathrm{I} \in \mathrm{D}_\Pi$ ein $s \in S_\Pi(\mathrm{I})$
- mit $\mathrm{obj}_\Pi(\mathrm{I}, s) \begin{cases} \geq \rho\, \mathrm{opt}(\mathrm{I}), & \text{falls Optimierungsziel max} \\ \leq \rho\, \mathrm{opt}(\mathrm{I}), & \text{falls Optimierungsziel min} \end{cases}$

allgemeines Schema

Frage: wie zeigen, dass ein Algorithmus ρ-approximativ ist, wenn Π $\mathcal{NP}$-schwer ist?
$\rightarrow$ untere Schranken

allgemeines Schema

Frage: wie zeigen, dass ein Algorithmus ρ-approximativ ist, wenn Π $\mathcal{NP}$-schwer ist?
$\rightarrow$ untere Schranken

- Instanz $I \in D_\Pi$
- untere Schranke l („komplementäre Struktur")
- obere Schranke (Lösung) $s \in S_\Pi(I)$ mit $\text{obj}_\Pi(I, s) \leq \rho \cdot l$ bzw. $\text{obj}_\Pi(I, s) \geq \rho \cdot l$.

THEOREM

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, gibt es keinen ρ-Approximationsalgorithmus, $\rho \in \mathbb{Q}_+$, für das TSP.

THEOREM

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, gibt es keinen ρ-Approximationsalgorithmus, $\rho \in \mathbb{Q}_+$, für das TSP.

DEFINITION

Das metrische TSP, Δ-TSP ist das TSP, eingeschränkt auf Instanzen (n, w), in denen die Dreiecksungleichung gilt, also

$$\forall i, j, k \in [n] : w(i, k) \leq w(i, j) + w(j, k)$$

THEOREM

Es gibt einen 2-Approximationsalgorithmus für das metrische TSP.