

Theoretische Informatik 3

Till Nierhoff

`nierhoff@informatik.hu-berlin.de`

Institut für Informatik

Humboldt-Universität zu Berlin

3. Juni 2003

Die Klassen \mathcal{P} , \mathcal{NP} und $\text{co-}\mathcal{NP}$

DEFINITION

$$\text{co-}\mathcal{NP} := \{\bar{A} \mid A \in \mathcal{NP}\}$$

Die Klassen \mathcal{P} , \mathcal{NP} und $\text{co-}\mathcal{NP}$

DEFINITION

$$\text{co-}\mathcal{NP} := \{\bar{A} \mid A \in \mathcal{NP}\}$$

- $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP} \cap \text{co-}\mathcal{NP}$

Die Klassen \mathcal{P} , \mathcal{NP} und $\text{co-}\mathcal{NP}$

DEFINITION

$$\text{co-}\mathcal{NP} := \{\bar{A} \mid A \in \mathcal{NP}\}$$

- $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP} \cap \text{co-}\mathcal{NP}$
- Vermutung: $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$
- $\iff \mathcal{P} \neq \text{co-}\mathcal{NP}$

\mathcal{NPO} : Optimierungsprobleme formal:

DEFINITION

$\Pi \in \mathcal{NPO}$ hat

- D_Π , Menge der Instanzen
- $S_\Pi(I) \neq \emptyset$, Menge der zulässigen Lösungen zu $I \in D_\Pi$
- $\text{obj}_\Pi : \{(I, s) \mid I \in D_\Pi, s \in S_\Pi(I)\} \rightarrow \mathbb{Q}_+$, Zielfunktion
- max, min, Optimierungsziel

\mathcal{NPO} : Optimierungsprobleme formal:

DEFINITION

$\Pi \in \mathcal{NPO}$ hat

- D_Π , Menge der Instanzen
- $S_\Pi(I) \neq \emptyset$, Menge der zulässigen Lösungen zu $I \in D_\Pi$
- $\text{obj}_\Pi : \{(I, s) \mid I \in D_\Pi, s \in S_\Pi(I)\} \rightarrow \mathbb{Q}_+$, Zielfunktion
- max, min, Optimierungsziel

- $\chi_{D_\Pi}, \chi_{s \in S_\Pi(I)} \in \mathcal{P}$

- $s \in S_\Pi(I) \implies |s| \leq p(|I|)$

- $\text{obj}_\Pi \in \mathcal{P}$

Beispiel VERTEXCOVER

- $D_{\Pi} = \{G = (V, E) \mid G \text{ Graph}\}$
- $S_{\Pi}(G) = \{W \subset V \mid W \text{ Knotenüberdeckung von } G\}$
- $\text{obj}_{\Pi}(G, W) = |W|$
- Optimierungsziel: min.

Beispiel VERTEXCOVER

- $D_{\Pi} = \{G = (V, E) \mid G \text{ Graph}\}$
- $S_{\Pi}(G) = \{W \subset V \mid W \text{ Knotenüberdeckung von } G\}$
- $\text{obj}_{\Pi}(G, W) = |W|$
- Optimierungsziel: min.

(Die Suchversion von) VERTEXCOVER ist \mathcal{NP} -schwer, da

$$A \in \mathcal{NP} \implies A \leq_p \text{VERTEXCOVER}$$

Approximationsalgorithmen

DEFINITION

Π ein $\mathcal{N}PO$ -Problem. $OPT = OPT_{\Pi}(I)$ sei Element von $S_{\Pi}(I)$ mit bestem Zielwert, opt. Ein ρ -Approximationsalgorithmus

- ist polynomiell
- liefert zu $I \in D_{\Pi}$ ein $s \in S_{\Pi}(I)$
- mit $obj_{\Pi}(I, s) \begin{cases} \geq \rho \text{ opt,} & \text{falls Optimierungsziel max} \\ \leq \rho \text{ opt,} & \text{falls Optimierungsziel min} \end{cases}$

Approximationsalgorithmen

DEFINITION

Π ein $\mathcal{N}PO$ -Problem. $OPT = OPT_{\Pi}(I)$ sei Element von $S_{\Pi}(I)$ mit bestem Zielwert, opt. Ein ρ -Approximationsalgorithmus

- ist polynomiell
- liefert zu $I \in D_{\Pi}$ ein $s \in S_{\Pi}(I)$
- mit $obj_{\Pi}(I, s) \begin{cases} \geq \rho \text{ opt,} & \text{falls Optimierungsziel max} \\ \leq \rho \text{ opt,} & \text{falls Optimierungsziel min} \end{cases}$

THEOREM

Es gibt einen 2-Approximationsalgorithmus für VERTEXCOVER.