

Theoretische Informatik III

10. Serie

Abgabe bis zum 24. Juni 2003

Aufgabe 25

[5+3+7+5 Punkte]

Gegeben seien n Aufträge mit den Laufzeiten p_1, \dots, p_n , sowie eine Anzahl m von Maschinen, die parallel arbeiten. Das Optimierungsproblem MACHINESCHEDULING besteht darin, eine Reihenfolge und Maschinenzuordnung für die Aufträge zu finden, so dass die benötigte Zeit bis zum Abarbeiten des letzten Auftrags minimal ist. Betrachten Sie den folgenden Algorithmus GREEDYSUM:

```
Eingabe:  $n, p_1, \dots, p_n, m$   
For  $x$  in  $\{1, \dots, n\}$  do  
    Hänge Auftrag  $x$  an die Warteschlange der Maschine mit der momentan  
    kleinsten Summe der Laufzeiten der zu bearbeitenden Prozesse  
EndFor
```

- a) Zeigen Sie, dass die Entscheidungsversion von MACHINESCHEDULING für $m = 2$ NP-vollständig ist.
- b) Zeigen Sie, dass die Entscheidungsversion von MACHINESCHEDULING für alle $m > 2$ NP-vollständig ist.
- c) Zeigen Sie, dass GREEDYSUM eine Approximationsgüte von $2 - \frac{1}{m}$ hat. Hinweis: Sei C die Zeit, die der Algorithmus benötigt, bis der letzte Auftrag abgearbeitet ist. Sei M eine Maschine, die die volle Zeit C benötigt. Sei i der Auftrag (mit Laufzeit p_i) der als letztes auf M verteilt wird. Sei C_{opt} die von der optimalen Lösung benötigte Zeit. Zeigen Sie, dass

$$m(C - p_i) + p_i \leq \sum_{j=1}^n p_j \leq mC_{opt}$$

und leiten Sie daraus das Ergebnis ab.

- d) Zeigen Sie, dass es für jedes m ein n und eine Instanz n, p_1, \dots, p_n, m gibt, so dass GREEDYSUM auf dieser Instanz eine Güte von genau $2 - \frac{1}{m}$ hat.