

Vorlesungsskript

Theoretische Informatik 3

Sommersemester 2005

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

13. Juli 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Relationalstrukturen	1
1.1	Darstellung endlicher Relationen	1
1.1.1	Graphische Darstellung	1
1.1.2	Matrixdarstellung (Adjazenzmatrix)	2
1.1.3	Tabellendarstellung (Adjazenzliste)	2
1.2	Operationen auf Relationen	3
1.3	Äquivalenz- und Ordnungsrelationen	6
1.4	Abbildungen	11
1.5	Homo- und Isomorphismen	11
2	Graphen	14
2.1	Cliquen und Stabilität	15
2.2	Euler- und Hamiltonkreise	18
2.3	Bäume	20
2.4	Bipartite Graphen	20
2.5	Planare Graphen	21
2.6	Färbung von Graphen und Landkarten	23
3	Netzwerke und der Heiratssatz	28
3.1	Flüsse in Netzwerken	28
3.2	Der Heiratssatz	33
4	Die Greedy-Methode und Matroide	36
4.1	Kürzeste Wege	36
4.2	Matroide	37
5	Approximationsalgorithmen	42

1 Relationalstrukturen

Sei A eine nichtleere Menge, R_i eine k_i -stellige Relation auf A , d.h. $R_i \subseteq A^{k_i}$ für $i = 1, \dots, n$. Dann heißt $(A; R_1, \dots, R_n)$ **Relationalstruktur**. Die Menge A heißt der **Individuenbereich** oder die **Trägermenge** der Relationalstruktur.

Wir werden hier hauptsächlich den Fall $n = 1, k_1 = 2$, also (A, R) mit $R \subseteq A \times A$ betrachten. Man nennt dann R eine **(binäre) Relation auf A** .

Beispiel 1

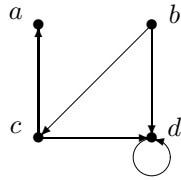
- (F, M) mit $F := \{f \mid f \text{ ist Fluss in Europa}\}$ und $M := \{(f, g) \in F \times F \mid f \text{ mündet in } g\}$.
- (U, B) mit $U := \{x \mid x \text{ ist Berliner}\}$ und $B := \{(x, y) \in U \times U \mid x \text{ ist Bruder von } y\}$.
- $(P(M), \subseteq)$, wobei $P(M)$ die Potenzmenge einer beliebigen Menge M und \subseteq die Inklusionsbeziehung auf den Teilmengen von M ist.
- (A, Id_A) , wobei $Id_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ die **Identität auf A** ist.
- (\mathbb{R}, \leq) .
- $(\mathbb{Z}, |)$, wobei $|$ die "teilt"-Relation bezeichnet.
- $(\mathcal{Fml}, \Rightarrow)$ mit $\mathcal{Fml} := \{F \mid F \text{ ist aussagenlogische Formel}\}$ und $\Rightarrow = \{(F, G) \in \mathcal{Fml} \times \mathcal{Fml} \mid G \text{ ist aussagenlogische Folgerung von } F\}$.

Oft wird für $(a, b) \in R$ auch die **Infix**-Schreibweise aRb benutzt.

1.1 Darstellung endlicher Relationen

1.1.1 Graphische Darstellung

Eine Relation R auf einer endlichen Menge A kann durch einen **gerichteten Graphen** $G = (A, R)$ mit **Knotenmenge** A und **Kantenmenge** R veranschaulicht werden. Hierzu stellen wir jedes Element $x \in A$ als einen Knoten dar und verbinden jedes Knotenpaar $(x, y) \in R$ durch eine gerichtete Kante (Pfeil). Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen **adjazent** (benachbart).



Der **Ausgangsgrad** eines Knotens $x \in V$ ist $d_{out}(x) = \|R(x)\|$, wobei $R(x) = \{y \in V \mid xRy\}$ der **Nachbereich** von x ist. Entsprechend ist $d_{in}(x) = \|\{y \in V \mid yRx\}\|$ der **Eingangsgrad** von x . Falls R symmetrisch (siehe unten) ist, können die Pfeilspitzen auch weggelassen werden. In diesem Fall ist $d(x) = d_{in}(x) = d_{out}(x)$ der **Grad** von x . Ist die zugrundeliegende Relation R zudem irreflexiv, so erhalten wir einen (schleifenfreien) **Graphen**.

1.1.2 Matrixdarstellung (Adjazenzmatrix)

Eine Relation R auf einer endlichen (geordneten) Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ lässt sich durch eine boolesche $n \times n$ -Matrix $M_R = (m_{ij})$ mit

$$m_{ij} := \begin{cases} 1, & a_i R a_j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

darstellen. Beispielsweise hat die Relation

$$R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$$

auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$ die Matrixdarstellung

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1.3 Tabellendarstellung (Adjazenzliste)

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine endliche Relation R in Form einer Tabelle darzustellen, die jedem Element $x \in A$ seinen Nachbereich $R(x)$ in Form einer Liste zuordnet:

x	$R(x)$
a	-
b	c, d
c	a, d
d	d

1.2 Operationen auf Relationen

Da Relationen Mengen sind, sind auf ihnen die mengentheoretischen Operationen **Durchschnitt**, **Vereinigung**, **Komplement** und **Differenz** definiert. Seien R und S Relationen auf A , dann ist

$$\begin{aligned} R \cap S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge xSy\}, \\ R \cup S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \vee xSy\}, \\ R - S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge \neg xSy\} \\ \overline{R} &= (A \times A) - R \end{aligned}$$

und $R \subseteq S$ bedeutet

$$\forall x, y : xRy \Rightarrow xSy.$$

Weiterhin ist für eine Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$ von Relationen auf A der **Schnitt über** \mathcal{M} und die **Vereinigung über** \mathcal{M} wieder eine Relation auf A .

$$\begin{aligned} \bigcap \mathcal{M} &= \{(x, y) \mid \forall R \in \mathcal{M} : xRy\} \\ \bigcup \mathcal{M} &= \{(x, y) \mid \exists R \in \mathcal{M} : xRy\} \end{aligned}$$

Die **transponierte (konverse) Relation** zu R ist

$$R^T := \{(y, x) \mid xRy\}.$$

R^T wird oft auch mit R^{-1} bezeichnet. Zum Beispiel ist $(\mathbb{R}, \leq^T) = (\mathbb{R}, \geq)$.

Sei R eine Relation auf A . Dann heißt R

reflexiv ,	falls $\forall x \in A : xRx$ (also $Id_A \subseteq R$),
irreflexiv ,	falls $\forall x \in A : \neg xRx$ (also $Id_A \subseteq \overline{R}$),
symmetrisch ,	falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$ (also $R \subseteq R^T$),
asymmetrisch ,	falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow \neg yRx$ (also $R \subseteq \overline{R^T}$),
antisymmetrisch ,	falls $\forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ (also $R \cap R^T \subseteq Id$),
konnex ,	falls $\forall x, y \in A : xRy \vee yRx$ (also $A \times A \subseteq R \cup R^T$),
semikonnex ,	falls $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$ (also $\overline{Id} \subseteq R \cup R^T$),
transitiv ,	falls $\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (also $R^2 \subseteq R$, s. Übungen)

gilt.

Beispiel 2

- Die Relation "ist Schwester von" ist zwar in einer reinen Damengesellschaft symmetrisch, i.a. jedoch weder symmetrisch noch asymmetrisch noch antisymmetrisch.
- $(\mathbb{R}, <)$ ist irreflexiv, asymmetrisch, transitiv und semikonnex.
- (\mathbb{R}, \leq) und $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ sind reflexiv, antisymmetrisch und transitiv. (\mathbb{R}, \leq) ist konnex, $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist im Fall $\|M\| \leq 1$ konnex, aber im Fall $\|M\| \geq 2$ weder semikonnex noch konnex.

Eine wichtige zweistellige Operation auf der Menge $\mathcal{P}(A \times A)$ aller Relationen auf A ist das Relationenprodukt (auch Komposition genannt).

Das **Produkt** zweier Relationen R und S auf A ist

$$R \circ S := \{(x, z) \mid \exists y : xRy \wedge ySz\}.$$

Übliche Bezeichnungen für das Relationenprodukt sind auch $R;S$ und $R \cdot S$ oder einfach RS . Für $\underbrace{R \circ \dots \circ R}_{n\text{-mal}}$ wird auch R^n geschrieben.

Vorsicht: Das n -fache Relationenprodukt von R sollte nicht mit dem n -fachen kartesischen Produkt der Menge R verwechselt werden. Wir vereinbaren, dass R^n das n -fache Relationenprodukt bezeichnen soll, falls R eine Relation ist.

Beispiel 3

Ist B die Relation "ist Bruder von", V "ist Vater von", M "ist Mutter von" und $E = V \cup M$ "ist Elternteil von", so ist $B \circ E$ die Relation "ist Onkel von".

Sind $M_R = (r_{ij})$ und $M_S = (s_{ij})$ boolesche $n \times n$ -Matrizen für R und S , so erhalten wir für $T = R \circ S$ die Matrix $M_T = (t_{ij})$ mit

$$t_{ij} := \bigvee_{k=1, \dots, n} (r_{ik} \wedge s_{kj})$$

Der Nachbereich $T(x)$ von x bzgl. der Relation $T = R \circ S$ berechnet sich zu

$$T(x) = \bigcup_{y \in R(x)} \{S(y)\} = \bigcup_{y \in R(x)} S(y).$$

Beispiel 4

Wir betrachten auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$ die Relationen $R = \{(a, a), (a, c), (c, b), (c, d)\}$ und $S = \{(a, b), (d, a), (d, c)\}$.

Relation	R	S	$R \circ S$	$S \circ R$
Graph				
Adjazenzmatrix	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Adjazenzliste	$a : a, c$ $b : -$ $c : b, d$ $d : -$	$a : b$ $b : -$ $c : -$ $d : a, c$	$a : b$ $b : -$ $c : a, c$ $d : -$	$a : -$ $b : -$ $c : -$ $d : a, b, c, d$

Beobachtung: Das Relationenprodukt ist nicht kommutativ, d.h. i.a. gilt nicht $R \circ S = S \circ R$.

Als nächstes zeigen wir, dass die Menge $\mathcal{R} = \mathcal{P}(A \times A)$ aller binären Relationen auf A mit dem Relationenprodukt \circ als binärer Operation und der Relation Id_A als neutralem Element eine Halbgruppe (oder **Monoid**) bildet.

Satz 5

Seien Q, R, S Relationen auf A . Dann gilt

$$(i) (Q \circ R) \circ S = Q \circ (R \circ S), \text{ d.h. } \circ \text{ ist assoziativ,}$$

$$(ii) Id \circ R = R \circ Id = R, \text{ d.h. } Id \text{ ist neutrales Element.}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (i) \text{ Es gilt: } x (Q \circ R) \circ S y &\Leftrightarrow \exists u \in A : x (Q \circ R) u \wedge u S y \\ &\Leftrightarrow \exists u \in A : (\exists v \in A : x Q v R u) \wedge u S y \\ &\Leftrightarrow \exists u, v \in A : x Q v R u S y \\ &\Leftrightarrow \exists v \in A : x Q v \wedge (\exists u \in A : v R u \wedge u S y) \\ &\Leftrightarrow \exists v \in A : x Q v (R \circ S) y \\ &\Leftrightarrow x Q \circ (R \circ S) y \end{aligned}$$

(ii) Wegen $x Id \circ R y \Leftrightarrow \exists z : x = z \wedge z R y \Leftrightarrow x R y$ folgt $Id \circ R = R$. Die Gleichheit $R \circ Id = R$ folgt analog. ■

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass der Schnitt über eine Menge transitiver Relationen wieder transitiv ist, d.h. es existiert zu jeder Relation R auf einer Menge A eine kleinste, R umfassende transitive Relation.

Die Relation

$$R^+ := \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid R \subseteq S, S \text{ transitiv}\}$$

heißt die **transitive Hülle** von R und

$$R^* := \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid R \subseteq S, S \text{ reflexiv und transitiv}\}$$

heißt die **reflexiv-transitive Hülle** von R .

Satz 6

$$(i) R^+ = \bigcup_{i \geq 1} R^i,$$

$$(ii) R^* = \bigcup_{i \geq 0} R^i, \text{ wobei } R^0 := Id.$$

Beweis: Siehe Übungen. ■

1.3 Äquivalenz- und Ordnungsrelationen

Die nachfolgende Tabelle gibt einen Überblick über die in diesem Abschnitt behandelten Relationalstrukturen.

	refl	sym.	trans.	asym.	antisym.	konnex	semikon.
Äquivalenzrel.	✓	✓	✓				
(Halb-)Ordnung	✓		✓		✓		
Striktordnung			✓	✓			
lineare Ord.			✓		✓	✓	
lin. Striktord.			✓	✓			✓
schwache Ord.			✓			✓	
Quasiordnung	✓		✓				

In der Tabelle sind nur die definierenden Eigenschaften durch ein "✓" gekennzeichnet. Das schließt nicht aus, dass gleichzeitig auch noch weitere Eigenschaften vorliegen.

Als erstes wenden wir uns den **Äquivalenzrelationen**, d.h. reflexiven, symmetrischen und transitiven Relationen zu.

Beispiele für Äquivalenzrelationen

- Auf der Menge aller Geraden im \mathbb{R}^2 die Parallelität, deren Äquivalenzklassen aus jeweils allen Geraden mit derselben Richtung (oder Steigung) bestehen.
- Auf der Menge aller Menschen "im gleichen Jahr geboren wie", d.h. alle Menschen eines Jahrgangs stehen in Relation zueinander.
- Auf \mathbb{Z} die Restgleichheit bei Division durch eine feste ganze Zahl m . Hierdurch werden die ganzen Zahlen in die m Restklassen modulo m unterteilt.
- Auf der Menge aller aussagenlogischen Formeln die semantische Äquivalenz.

Den bzgl. einer Äquivalenzrelation E zu x gehörigen Nachbereich $E(x)$ nennt man **die von x repräsentierte Äquivalenzklasse** und bezeichnet sie mit $[x]_E$. Die durch E auf A induzierte Partition (s.u.) $\{[x]_E \mid x \in A\}$ wird **Quotienten- oder Faktormenge** genannt und mit A/E bezeichnet. Die Anzahl der Äquivalenzklassen von E wird auch als der **Index** von E bezeichnet.

Definition 7

Sei A eine Menge. Eine Familie $\{M_i \mid i \in I\}$ von nichtleeren Mengen $M_i \subseteq A$ heißt **Partition** von A , falls gilt:

- $A = \bigcup_{i \in I} M_i$, d.h. die Mengen M_i überdecken A .
- Für $i, j \in I$ mit $M_i \neq M_j$ ist $M_i \cap M_j = \emptyset$, d.h. die Mengen M_i sind paarweise disjunkt.

Wie der nächste Satz zeigt, beschreiben Äquivalenzrelationen auf A und Partitionen von A den selben Sachverhalt.

Satz 8

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) E ist eine Äquivalenzrelation auf A .

(ii) Für alle $x, y \in A$ gilt

$$xEy \Leftrightarrow E(x) = E(y) \quad (*)$$

(iii) Die Mengen $E(x)$, $x \in A$, bilden eine Partition von A mit $x \in E(x)$.

Beweis: Sei E eine Äquivalenzrelation auf A . Es ist leicht zu sehen, dass auf Grund der Symmetrie und Transitivität von E aus xEy sofort $E(x) = E(y)$ folgt. Umgekehrt impliziert die Gleichheit $E(x) = E(y)$ unter Benützung der Reflexivität, dass $x \in E(x) = E(y)$ ist und somit xEy gilt. Dies zeigt, dass E die Äquivalenz $(*)$ erfüllt.

Sei nun E eine Relation, die $(*)$ erfüllt. Dann ist E offensichtlich reflexiv und die Mengen $E(x)$ bilden eine Überdeckung von A . Falls zwei Mengen $E(x)$ und $E(y)$ ein gemeinsames Element z enthalten, so folgt xEz und yEz und hieraus $E(x) = E(z) = E(y)$, d.h. die Mengen $E(x)$ bilden sogar eine Partition von A .

Wird schließlich A von den Mengen $E(x)$ partitioniert, wobei $x \in E(x)$ für alle $x \in A$ gilt, so folgt

$$xEy \Leftrightarrow y \in E(x) \cap E(y) \Leftrightarrow E(x) = E(y).$$

Daher übertragen sich die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität unmittelbar von der Gleichheitsrelation auf E . ■

Die kleinste Äquivalenzrelation auf A ist die Identität Id_A , die größte die Allrelation $A \times A$. Im Falle der Identität enthält jede Äquivalenzklasse nur ein Element, d. h. $A/Id_A = \{\{x\} \mid x \in A\}$. Im Falle der Allrelation $A \times A$ gibt es nur eine Äquivalenzklasse A , d.h. $A/(A \times A) = \{A\}$. Sind allgemein E_1, E_2 zwei Äquivalenzrelationen auf A mit $E_1 \subseteq E_2$, so ist jede Äquivalenzklasse von E_1 in einer Äquivalenzklasse von E_2 enthalten, d.h. jede Äquivalenzklasse von E_2 ist die Vereinigung von Äquivalenzklassen von E_1 . Man sagt auch, E_1 bewirkt eine "feinere" Klasseneinteilung als E_2 . Demnach ist die Identität die feinste und die Allrelation die grösste Äquivalenzrelation. Da der Schnitt über eine Menge von Äquivalenzrelationen wieder eine Äquivalenzrelation ist, können wir für eine beliebige Relation R auf einer Menge A die kleinste R umfassende Äquivalenzrelation

$$h_{\text{äq}}(R) := \bigcap \{E \subseteq A \times A \mid R \subseteq E, E \text{ ist eine Äquivalenzrelation}\}$$

definieren.

Als nächstes betrachten wir **Ordnungen**, d.h. reflexive, antisymmetrische und transitive Relationen; auch (**reflexive**) **Halbordnungen** oder **partielle Ordnungen** genannt.

Beispiele für Ordnungen

a) $(\mathcal{P}(M); \subseteq)$, (\mathbb{Z}, \leq) , $(\mathbb{N}, |)$.

- b) Auf der Menge $\mathcal{A}(M)$ aller Äquivalenzrelationen auf M die Relation "feiner als". Dabei ist, wie wir gesehen haben, E_1 feiner als E_2 , falls E_1 in E_2 enthalten ist. In diesem Fall bewirkt E_1 eine feinere Klasseneinteilung auf M als E_2 , da jede Äquivalenzklasse von E_1 in einer Äquivalenzklasse von E_2 enthalten ist.
- c) Ist R eine Ordnung auf A und $B \subseteq A$, so ist $R \cap (B \times B)$ eine Ordnung auf B (die **Einschränkung** von R auf B). Beispielsweise ist $(\mathcal{A}(M); \subseteq)$ die Einschränkung von $(\mathcal{P}(M \times M); \subseteq)$ auf $\mathcal{A}(M)$.

Wir untersuchen nun den Bezug zu **Striktordnungen**, d.h. transitiven und asymmetrischen Relationen.

Zu den Ordnungen $(\mathcal{P}(M); \subseteq)$ und $(\mathbb{Z}; \leq)$ gehören die Striktordnungen $(\mathcal{P}(M); \subsetneq)$ und $(\mathbb{Z}; <)$. Der nächste Satz zeigt, dass ganz allgemein zu jeder Ordnung eine Striktordnung und umgekehrt zu jeder Striktordnung eine Ordnung gehört.

Satz 9

Falls R eine Striktordnung ist, ist $R \cup Id$ eine Ordnung. Falls R eine Ordnung ist, ist $R \setminus Id$ eine Striktordnung.

Bemerkung 10

Der leichten Lesbarkeit willen verwenden wir das Symbol $<$ für eine Striktordnung und das Symbol \leq für die zugehörige Ordnung.

Beweis: Sei zunächst $<$ eine Striktordnung. Wir zeigen, dass dann $\leq := < \cup Id$ eine Ordnung ist.

reflexiv: Klar.

antisymmetrisch: Gelte $x \leq y \wedge y \leq x$. Aus der Annahme $x \neq y$ folgt $x < y \wedge y < x$ im Widerspruch zur Asymmetrie von $<$.

transitiv: Sei $x \leq y \wedge y \leq z$.

1. Fall: $x = y \vee y = z$: Klar.

2. Fall: $x \neq y \wedge y \neq z$. Nun folgt $x < y < z$, also $x < z$ und damit erst recht $x \leq z$.

Sei nun \leq eine Ordnung. Wir zeigen, dass dann $< = \leq \setminus Id = \{(x, y) \mid x \leq y, x \neq y\}$ eine Striktordnung ist. Man beachte, dass $<$ irreflexiv ist.

asymmetrisch: Aus der Annahme $x < y$ und $y < x$ folgt zunächst $x \leq y$ und $y \leq x$.

Da \leq antisymmetrisch ist, folgt $x = y$ und somit $x < x$ im Widerspruch zur Irreflexivität von $<$.

transitiv: Sei $x < y < z$. Dann folgt $x \leq y \leq z$ und somit $x \leq z$, da \leq transitiv

ist. Aus der Annahme $x = z$ folgt $z \leq y$, also $z = y$ (wegen $y \leq z$ und der Antisymmetrie von \leq), was im Widerspruch zur Irreflexivität von $<$ steht. ■

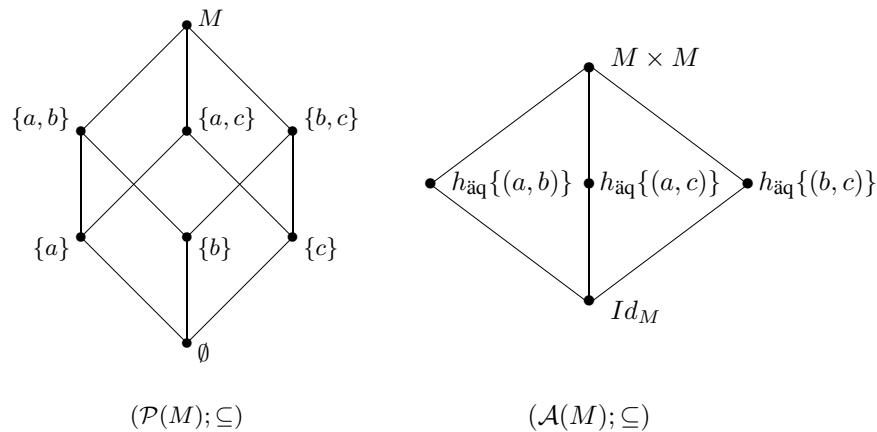
Zur graphischen Darstellung von Striktordnungen $<$ bzw. der zugehörigen Ordnungen \leq werden gerne so genannte **Hasse-Diagramme** verwendet. Dabei wird nur der Graph der Nachbarrelation $\triangleleft := < \setminus <^2$, d.h.

$$x \triangleleft y \Leftrightarrow x < y \wedge \neg \exists z : x < z < y$$

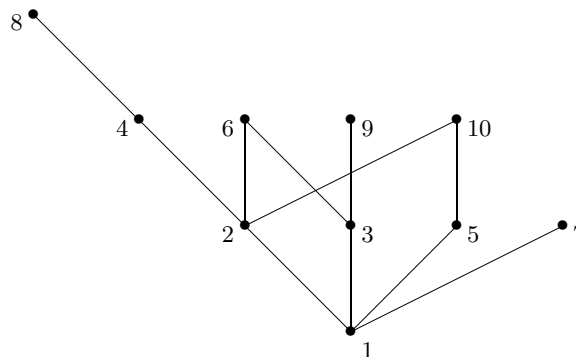
gezeichnet. Für $x \triangleleft y$ sagt man auch, y ist **oberer Nachbar** von x . Weiterhin wird im Fall $x \triangleleft y$ der Knoten y oberhalb vom Knoten x gezeichnet, so dass auf Pfeilspitzen verzichtet werden kann.

Beispiel 11

- Sei $M = \{a, b, c\}$.



- Die Einschränkung der "teilt"-Relation auf $\{1, 2, \dots, 10\}$:



Sei \leq eine Ordnung auf A und sei $H \subseteq A$. Ein Element $a \in H$ heißt **kleinstes Element** oder **Minimum** von H , falls $a \leq b$ für alle $b \in H$ gilt. Gilt entsprechend $a \geq b$ für alle $b \in H$, so heißt $a \in H$ **größtes Element** oder **Maximum** von H .

Aufgrund der Antisymmetrie kann es in H höchstens ein kleinstes und höchstens ein größtes Element geben. Besteht H beispielsweise aus zwei **unvergleichbaren** Elementen a und b , d.h. gilt weder $a \leq b$ noch $b \leq a$, so besitzt $H = \{a, b\}$ weder ein kleinstes noch ein größtes Element.

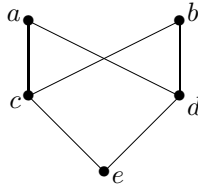
Ein Element $a \in H$ heißt **minimal** in H , falls es in H keine kleineren Elemente gibt, d.h. es gilt für alle $b \in H$,

$$b \leq a \Rightarrow b = a.$$

Entsprechend heißt ein Element $a \in H$ **maximal**, wenn

$$\forall b \in H : a \leq b \Rightarrow a = b$$

gilt, also keine echt größeren Elemente in H existieren. In folgender Ordnung



besitzt beispielsweise die Teilmenge $\{a, b, c\}$ das kleinste Element c , aber kein größtes Element. Die Menge $\{a, b, c, e\}$ besitzt die beiden maximalen Elemente a und b , sowie ein minimales Element e .

Jedes Element $a \in A$ mit $a \leq b$ für alle $b \in H$ heißt **untere** und jedes $c \in A$ mit $b \leq c$ für alle $b \in H$ heißt **obere Schranke** von H . Eine Teilmenge H von A heißt **nach oben beschränkt**, wenn (mindestens) eine obere Schranke für H existiert, und **nach unten beschränkt**, wenn es eine untere Schranke für H gibt. Eine nach oben und unten beschränkte Teilmenge heißt **beschränkt**.

In obigem Beispiel hat die Menge $H = \{a, b, c\}$ die beiden unteren Schranken c und e ; obere Schranken existieren nicht.

Besitzt eine Teilmenge H eine größte untere Schranke, d.h. besitzt die Menge aller unteren Schranken von H ein größtes Element, so heißt dieses das **Infimum von H** ($\inf H$). Gilt entsprechend für ein Element $s \in A$

$$(\forall b \in H : b \leq s) \wedge (\forall s' \in A : (\forall b \in H : b \leq s') \Rightarrow s \leq s'),$$

d.h. ist s die kleinste obere Schranke von H , so heißt s das **Supremum von H** ($\sup H$). Aufgrund der Definition ist klar, dass es höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum für jede Teilmenge gibt.

Im vorigen Beispiel besitzt die Teilmenge $H = \{a, b, c\}$ das Infimum $\inf H = c$, aber kein Supremum, da keine oberen Schranken für H existieren. Das Infimum von $\{a, b\}$ existiert ebenfalls nicht, da die Menge $\{c, d, e\}$ der unteren Schranken von $\{a, b\}$ kein größtes Element besitzt. Das Infimum von $\{c, d\}$ ist e .

Auch in linearen Ordnungen muss nicht jede Teilmenge ein Supremum oder Infimum besitzen. So hat in der linear geordneten Menge (\mathbb{Q}, \leq) die Teilmenge $H := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ weder ein Supremum noch ein Infimum. Natürlich hat in linearen Ordnungen jede endliche Teilmenge ein kleinstes und ein größtes Element und somit erst recht ein Supremum und ein Infimum.

Eine Teilmenge H von A heißt **Kette**, falls je zwei Elemente vergleichbar sind, d.h. es gilt für alle $a, b \in H$,

$$a \leq b \vee b \leq a.$$

Im Beispiel bilden $\{a, c, e\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, c, e\}$ und $\{b, d, e\}$ sowie alle Teilmengen hiervon Ketten.

Eine Teilmenge H von A heißt **Antikette**, falls je zwei Elemente unvergleichbar sind, d.h. es gilt für alle $a, b \in H$,

$$a \not\leq b \wedge b \not\leq a.$$

Im Beispiel bilden $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ und $\{e\}$ sowie alle Teilmengen hiervon Antiketten.

1.4 Abbildungen

Eine binäre Relation R auf einer Menge M heißt **rechtseindeutig**, falls

$$xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z$$

und **linkseindeutig**, falls

$$xRz \wedge yRz \Rightarrow x = y$$

für alle $x, y, z \in M$ gilt.

Der **Nachbereich** $N(R)$ und der **Vorbereich** $V(R)$ von R ist

$$N(R) := \bigcup_{x \in M} R(x) \quad \text{und} \quad V(R) := \bigcup_{x \in M} R^T(x).$$

Eine rechtseindeutige Relation R mit $V(R) = A$ und $N(R) \subseteq B$ heißt **Abbildung** oder **Funktion** von A nach B (kurz $R : A \rightarrow B$). Wie üblich werden wir Abbildungen meist mit kleinen Buchstaben f, g, h, \dots bezeichnen und für $(x, y) \in f$ nicht xfy sondern $f(x) = y$ oder $f : x \mapsto y$ schreiben.

Ist $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung, so wird der Vorbereich $V(f) = A$ der **Definitionsbereich** und die Menge B der **Wertebereich** oder **Wertevorrat** von f genannt. Der Nachbereich $N(f)$ wird als **Bild** von f bezeichnet. Im Fall $N(f) = B$ heißt f **surjektiv**. Ist f linkseindeutig, so heißt f **injektiv**. In diesem Fall impliziert $f(x) = f(y)$ die Gleichheit $x = y$. Eine injektive und surjektive Abbildung heißt **bijektiv**. Für eine injektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ ist auch f^T eine Abbildung, die mit f^{-1} bezeichnet und die **inverse Abbildung** zu f genannt wird. Man beachte, dass der Definitionsbereich $V(f^{-1}) = N(f)$ nur dann gleich B ist, wenn f auch surjektiv, also eine Bijektion ist.

1.5 Homo- und Isomorphismen

Seien (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Relationalstrukturen. Eine Abbildung $h : A_1 \rightarrow A_2$ heißt **Homomorphismus**, falls für alle $a, b \in A_1$ gilt:

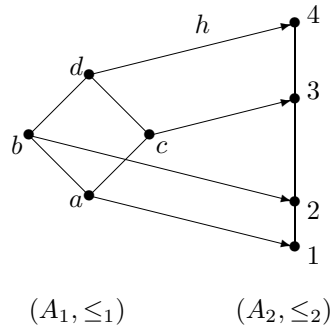
$$aR_1b \Rightarrow h(a)R_2h(b).$$

Sind (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Ordnungen, so spricht man von **Ordnungshomomorphismen** oder einfach von **monotonen** Abbildungen. Injektive Ordnungshomomorphismen werden auch **streng monotone** Abbildungen genannt.

Beispiel 12

Folgende Abbildung $h : A_1 \rightarrow A_2$ ist ein bijektiver Homomorphismus. (Das

Bild zeigt die Hasse-Diagramme der beiden Ordnungen (A_1, \leq_1) und (A_2, \leq_2) .



Bemerkung 13

Die Umkehrung eines bijektiven Homomorphismus muss kein Homomorphismus sein (siehe Beispiel: wegen $2 \leq_2 3$ und $h^{-1}(2) = b \not\leq_1 c = h^{-1}(3)$ ist h^{-1} nicht monoton). Ist dies jedoch der Fall, so spricht man von einem Isomorphismus.

Definition 14 (Isomorphismus)

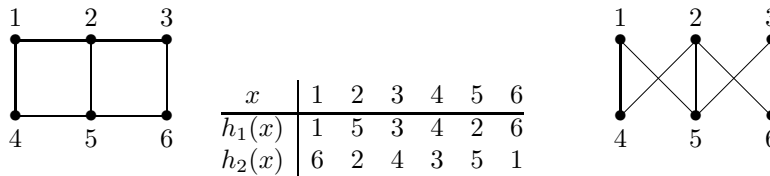
Ein bijektiver Homomorphismus $h : A_1 \rightarrow A_2$, bei dem auch h^{-1} ein Homomorphismus ist, d.h. es gilt

$$\forall a, b \in A_1 : aR_1b \Leftrightarrow h(a)R_2h(b).$$

heißt **Isomorphismus**. In diesem Fall heißen die Strukturen (A_1, R_1) und (A_2, R_2) **isomorph** (kurz: $(A_1, R_1) \cong (A_2, R_2)$).

Beispiel 15

- Die beiden folgenden Graphen sind isomorph. Zwei Isomorphismen sind beispielsweise h_1 und h_2 .



- Die Bijektion $h : x \rightarrow e^x$ ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen (\mathbb{R}, \leq) und $((0, \infty), \leq)$.
- Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$T_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}$$

die Menge aller Teiler von n und $P_n := T_n \cap \text{Prim}$ die Menge aller Primteiler von n . Dann ist für quadratfreies n , d.h. es gibt kein $k \in \mathbb{N}$, so dass k^2 die Zahl n teilt, die Abbildung $h : k \mapsto P_k$ ein Ordnungsisomorphismus zwischen $(T_n, |)$ und $(P(P_n), \subseteq)$.

- Während auf der Knotenmenge $V = [3]$ insgesamt $2^3 = 8$ verschiedene Graphen existieren, gibt es auf dieser Menge nur 4 unterschiedliche nichtisomorphe Graphen:

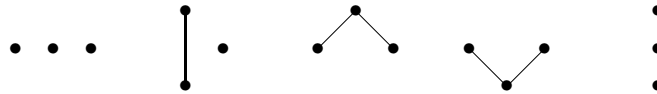


Auf der Knotenmenge $V = [n]$ existieren genau $2^{\binom{n}{2}}$ verschiedene Graphen. Da nicht mehr als $n!$ dieser Graphen isomorph zueinander sein können, gilt für die Anzahl $a(n)$ aller nichtisomorphen Graphen auf $[n]$ $a(n) \geq g(n) := 2^{\binom{n}{2}}/n!$. Tatsächlich ist $a(n)$ asymptotisch gleich $g(n)$ (in Zeichen: $a(n) \sim g(n)$), d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)/g(n) = 1,$$

also gibt es auf $V = [n]$ auch nicht wesentlich mehr als $g(n)$ nichtisomorphen Graphen.

- Es existieren genau 5 nichtisomorphe Ordnungen mit 3 Elementen:



Anders ausgedrückt: Die Klasse aller dreielementigen Ordnungen zerfällt unter der Äquivalenzrelation \cong in fünf Äquivalenzklassen, die durch obige fünf Hasse-Diagramme repräsentiert werden.

2 Graphen

Wir betrachten zunächst nur ungerichtete Graphen $G = (V, E)$, d.h. E ist eine symmetrische und irreflexive Relation auf V . Da in diesem Fall für jedes Paar $(x, y) \in E$ auch $(y, x) \in E$ enthalten ist und $x \neq y$ gilt, können wir die geordneten Paare (x, y) bzw. (y, x) durch ungeordnete Paare $\{x, y\}$ ersetzen. Dies führt uns auf folgende Definition.

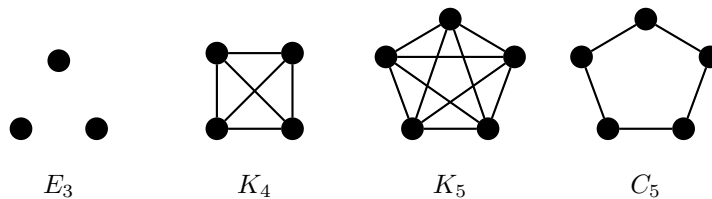
Definition 16 (Graph)

Sei V eine endliche Menge. Ein (endlicher, ungerichteter) **Graph** ist ein Paar $G = (V, E)$ mit $E \subseteq \binom{V}{2}$, wobei $\binom{V}{2} := \{e \subseteq V \mid \|e\| = 2\}$ aus allen zweielementigen Teilmengen von V besteht.

Die Anzahl $\|V\|$ der Knoten wird die **Ordnung** von G genannt und mit $n(G)$ oder einfach mit n bezeichnet. Als Knotenmenge verwenden wir meist die Menge $V = \{1, \dots, n\}$, für die wir auch kurz $[n]$ schreiben. Die Anzahl $\|E\|$ der Kanten wird die **Größe** von G genannt und mit $m(G)$ oder einfach mit m bezeichnet.

Beispiel 17

Der kleinste Graph auf der Knotenmenge $V = [n]$ ist $E_n = ([n], \emptyset)$ und der größte ist $K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$. Jeder zu E_n isomorphe Graph heißt **leer** und jeder zu K_n isomorphe Graph heißt **vollständig**. Ein Beispiel für einen Graphen mit $m = n$ Kanten ist $C_n = ([n], E)$ für $n \geq 3$, wobei $E = \{\{i, i+1\} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\{1, n\}\}$ ist.



Eine Kante $e = \{u, v\} \in E$ **verbindet** die beiden **Endpunkte** u und v . Man sagt auch, e **inzidiert** mit den Knoten u und v , e und u bzw. e und v sind **inzident**, oder die Knoten u und v sind **adjazent** (benachbart).

Der zu $G = (V, E)$ **komplementäre** Graph ist $\hat{G} = (V, \bar{E})$ mit $\bar{E} = \binom{V}{2} \setminus E$. Beispielsweise sind der leere Graph E_n und der vollständige Graph K_n komplementär.

Die **Nachbarschaft** eines Knotens $u \in V$ ist die Knotenmenge $\Gamma(u) = \{v \in V \mid \{u, v\} \in E\}$. Die Anzahl $\|\Gamma(u)\|$ der Nachbarn ist der **Grad** von u und wird mit $d(u)$ bezeichnet. Da jede Kante mit zwei Knoten inzidiert, gilt

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2m(G).$$

Der **Maximalgrad** von G ist

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} d(u)$$

und der **Minimalgrad** von G ist

$$\delta(G) = \min_{u \in V} d(u).$$

Im Fall $\Delta(G) = \delta(G)$ heißt G **regulär**.

Ein **Weg** ist eine Folge $W = v_0, v_1, \dots, v_l$ von Knoten mit $l \geq 0$ und $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \dots, l-1$. v_0 heißt der **Anfangs-** und v_l der **Endknoten** von W . Man sagt auch, W ist ein v_0 - v_l -Weg. Die Anzahl l der dabei durchlaufenen Kanten wird als **Länge** $l(W)$ von W bezeichnet. Existiert zwischen je zwei Knoten $u, v \in V$ ein Weg, so heißt G **zusammenhängend**.

Ein **Pfad** oder **einfacher Weg** ist ein Weg $P = v_0, v_1, \dots, v_l$, bei dem alle Knoten v_i paarweise verschieden sind. Ein **Kreis** ist ein Weg $K = v_0, v_1, \dots, v_l$ mit $l \geq 3$, $v_0 = v_l$ und $v_i \neq v_j$ für $1 \leq i < j \leq l$, d.h. v_1, \dots, v_l ist ein Pfad. Ein Graph, der keinen Kreis besitzt, heißt **kreisfrei** oder **azyklisch**.

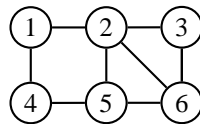
$G' = (V', E')$ ist **Teilgraph** von $G = (V, E)$, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E \cap \binom{V'}{2}$ gilt. Im Fall $V' = V$ wird G' auch ein **(auf)spannender** Teilgraph von G genannt und mit $G - E''$ bezeichnet, wobei E'' die Menge $E - E'$ der aus E entfernten Kanten ist.

Gilt dagegen $V' \subseteq V$ und $E' = E \cap \binom{V'}{2}$, so wird G' der von V' in G **induzierte** Teilgraph genannt und mit $G[V']$ bezeichnet. Der Subgraph $G[V - U]$ von G , der aus G durch Entfernung aller Knoten $u \in U$ sowie aller mit diesen Knoten inzidenten Kanten entsteht, bezeichnen wir auch kurz mit $G - U$ bzw. mit $G - u$, falls $U = \{u\}$ nur einen Knoten enthält.

2.1 Cliques und Stabilität

Definition 18 (Clique)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann heißt $C \subseteq V$ **Clique** in G , falls $G[C]$ vollständig ist. Ist dagegen $G[S]$ leer, so heißt $S \subseteq V$ **stabil** oder **unabhängig** in G . Eine Knotenmenge $K \subseteq V$ heißt **Knotenüberdeckung**, falls für alle $e \in E$ gilt: $e \cap K \neq \emptyset$.



$$C = \{2, 5, 6\}$$

$$S = \{1, 3, 5\}$$

Die Cliquenzahl von G ist

$$\omega(G) = \max\{\|C\| \mid C \text{ ist Clique in } G\},$$

die Stabilitätszahl (oder Unabhängigkeitszahl) von G ist

$$\alpha(G) = \max\{\|S\| \mid S \text{ ist stabil in } G\}$$

und die Überdeckungszahl von G ist

$$\beta(G) = \min\{\|K\| \mid K \text{ ist eine Knotenüberdeckung in } G\}.$$

Beispiel 19

$$\alpha(K_n) = 1, \quad \beta(K_n) = n - 1, \quad \omega(K_n) = n,$$

$$\alpha(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad \beta(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \quad \omega(C_n) = \begin{cases} 3, & n = 3, \\ 2, & n \geq 4. \end{cases}$$

Lemma 20

(i) $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$,

(ii) $1 \leq \omega(G) \leq \Delta(G) + 1$,

(iii) $\frac{n}{\Delta(G)+1} \leq \alpha(G) \leq n$,

(iv) $\alpha(G) + \beta(G) = n$.

Beweis:

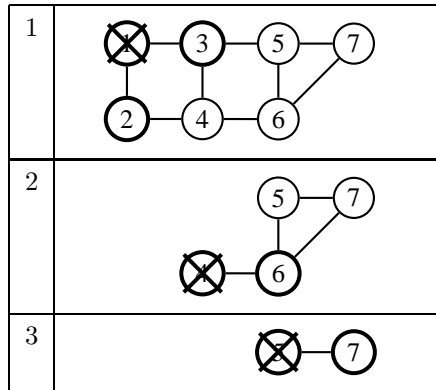
(i) Da C genau dann eine Clique in G ist, wenn C stabil in \bar{G} ist, folgt

$$\max\{\|C\| \mid C \text{ ist Clique in } G\} = \max\{\|S\| \mid S \text{ ist stabil in } \bar{G}\}.$$

(ii) $\omega(G) \geq 1$ ist klar. Da der Grad aller Knoten u in einer Clique C mindestens $\|C\| - 1$ beträgt, folgt auch $\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$.

(iii) $\alpha(G) \leq n$ ist klar. Für $\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}$ betrachten wir folgenden Algorithmus.

- 1 **Eingabe:** $G = (V, E)$
- 2 $S \leftarrow \emptyset$
- 3 **repeat** wähle Knoten $u \in V$
- 4 $S \leftarrow S \cup \{u\}$
- 5 $G \leftarrow G - (\Gamma(u) \cup \{u\})$
- 6 **until** $V = \emptyset$
- 7 **Ausgabe:** S



Da G zu Beginn n Knoten hat und da in jedem Schleifendurchlauf höchstens

$$\|\Gamma(u) \cup \{u\}\| = 1 + \|\Gamma(u)\| \leq 1 + \Delta(G)$$

Knoten entfernt werden, ist die Anzahl der Schleifendurchläufe (und damit die Größe der stabilen Menge S) mindestens $\frac{n}{\Delta(G)+1}$.

(iv) Es ist leicht zu sehen, dass $S \subseteq V$ genau dann stabil ist, wenn $V - S$ eine Knotenüberdeckung ist.

■

Für einen gegebenen endlichen Graphen G und eine Zahl k betrachten wir nun die folgenden graphentheoretischen Fragestellungen:

Clique: Besitzt G eine Clique der Größe k ?

Independent-Set (IS): Besitzt G eine stabile Knotenmenge der Größe k ?

Node-Cover (NC): Besitzt G eine Knotenüberdeckung der Größe k ?

Satz 21

IS ist NP-vollständig.

Beweis: Wir zeigen $3\text{-SAT} \leq_p \text{IS}$. Sei

$$F = \bigwedge_{i=1}^m \underbrace{C_i}_{\bigvee_{j=1}^{k_i} l_{ij}}$$

mit $k_i \leq 3$ und $l_{ij} \in \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$. Betrachte den folgenden Graphen $G = (V, E)$ mit

$$\begin{aligned} V &= \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k_i\} \\ E &= \{(i, j), (i, j')\} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < j' \leq k_i\} \\ &\quad \cup \{(s, t), (u, v)\} \mid l_{st} \text{ und } l_{uv} \text{ sind komplementär}\}. \end{aligned}$$

Dabei heißen zwei Literale **komplementär**, wenn das eine die Negation des anderen ist. Nun gilt

- $F \in 3\text{-SAT} \Leftrightarrow$
- \Leftrightarrow es gibt eine Belegung, die in jeder Klausel C_i mindestens ein Literal wahr macht
 - \Leftrightarrow es gibt m Literale $l_{1,j_1}, \dots, l_{m,j_m}$, die paarweise nicht komplementär sind
 - \Leftrightarrow es gibt m Knoten $(1, j_1), \dots, (m, j_m)$, die nicht durch Kanten verbunden sind
 - \Leftrightarrow G besitzt eine stabile Knotenmenge der Größe m .

■

Korollar 22

Clique ist NP-vollständig.

Beweis: Da C genau dann in $G = (V, E)$ stabil ist, wenn C eine Clique in dem zu G komplementären Graphen $\bar{G} = (V, E')$ mit $E' = \binom{V}{2} \setminus E$ ist, können wir IS mittels der Reduktionsfunktion

$$f(G, k) = (\bar{G}, k)$$

auf CLIQUE reduzieren. ■

Korollar 23

NC ist NP-vollständig.

Beweis: Da S genau dann stabil ist, wenn $V - S$ eine Knotenüberdeckung ist, können wir IS mittels

$$f(G, k) = (G, n - k)$$

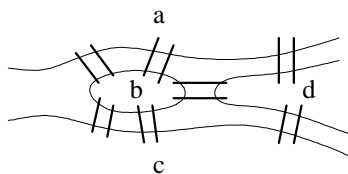
auf NC reduzieren. ■

2.2 Euler- und Hamiltonkreise

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Ein Weg $W = v_0, v_1, \dots, v_l$ heißt **Eulerweg** in G , falls jede Kante in E genau einmal durchlaufen wird, d.h. es gilt

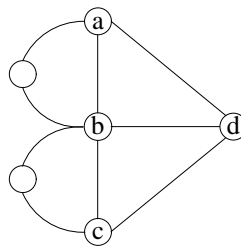
$$\{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 0 \leq i \leq l-1\} = E \text{ und } l(W) = m(G).$$

Gilt zudem $v_l = v_0$, so heißt W **Eulerkreis**. Man beachte, dass ein Eulerkreis kein Kreis sein muss, da er einzelne Knoten mehrmals durchlaufen kann.

Königsberger Brückenproblem:

Frage: Gibt es einen Spaziergang über alle 7 Brücken, bei dem keine Brücke mehrmals überquert werden muss und der zum Ausgangspunkt zurückführt?

Gelöst von Euler (1707 – 1783) durch Betrachtung des folgenden Graphen, der offenbar genau dann einen Eulerkreis hat, wenn die Antwort auf obige Frage „ja“ ist.



Satz 24 (Euler, 1736)

Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn all seine Knoten geraden Grad haben.

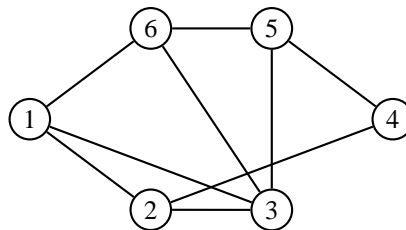
(Beweis siehe Übungen.)

Ein Kreis $K = v_0, v_1, \dots, v_l$ heißt **Hamiltonkreis** in G , falls jeder Knoten in V genau einmal durchlaufen wird, d.h. es gilt

$$\{v_i \mid 0 \leq i \leq l\} = V \text{ und } l(K) = n(G).$$

Beispiel 25

Der Graph



besitzt den Hamiltonkreis $K = 1, 6, 3, 5, 4, 2, 1$.

Aufgrund des Satzes von Euler bereitet es keine Schwierigkeiten, für einen gegebenen Graphen zu entscheiden, ob er einen Eulerkreis besitzt. Auch das Auffinden eines Eulerkreises ist nicht schwierig (siehe Übungen). Dagegen ist das Problem, die Existenz eines Hamiltonkreises zu entscheiden, NP-vollständig.

2.3 Bäume

Definition 26 (*Baum*)

Ein **Baum** ist ein zusammenhängender und azyklischer Graph (V, E) . Jeder Knoten $u \in V$ vom Grad $d(u) \leq 1$ heißt **Blatt** (oder Endknoten) und die übrigen Knoten (vom Grad ≥ 2) heißen **innere Knoten**.

Lemma 27

Jeder Baum mit $n \geq 2$ Knoten hat mindestens 2 Blätter.

Beweis: Ausgehend von einem beliebigen Knoten u_0 lässt sich ein Weg $P = u_0, u_1, \dots, u_l$ konstruieren, indem man für $i = 0, 1, \dots, l-1$ jeweils eine noch nicht benutzte Kante $\{u_i, u_{i+1}\}$ wählt. Da T ein Baum ist, gilt $u_i \neq u_j$ für $i \neq j$. Da T endlich ist, muss daher nach endlich vielen Schritten ein Knoten u_l erreicht werden, der keine Fortsetzung von P erlaubt, da er nur mit der Kante $\{u_{l-1}, u_l\}$ inzidiert. Also ist u_l ein Blatt und ein weiteres Blatt lässt sich dadurch finden, dass man dieses Verfahren mit dem Startknoten u_l wiederholt. ■

Ein Baum $T = (V, E)$ mit einem ausgezeichneten Knoten $r \in V$ (der **Wurzel** genannt wird) heißt **Wurzelbaum** und wird mit (T, r) bezeichnet.

2.4 Bipartite Graphen

Definition 28 (*bipartit*)

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für $U, W \subseteq V$ ist dann $E(U, W) = \{\{u, w\} \in E \mid u \in U, w \in W\}$ die Menge aller zwischen U und W verlaufenden Kanten.
- Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **bipartit**, falls sich V in zwei Teilmengen U und W mit $E(U, W) = E$ partitionieren lässt (d.h. alle Kanten verlaufen zwischen U und W). In diesem Fall notieren wir G auch in der Form $G = (U, W, E)$.

Einen Spezialfall bildet der **vollständig bipartite** Graph $K_{u,w} = (U, W, E)$ mit $U = \{1, \dots, u\}$ und $W = \{u+1, \dots, u+w\}$, der alle Kanten zwischen $U = \{1, \dots, u\}$ und $W = \{u+1, \dots, u+w\}$ enthält, d.h. $E = \{\{i, j\} \mid 1 \leq i \leq u < j \leq u+w\}$.

Satz 29

Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keine Kreise ungerader Länge besitzt.

(Beweis siehe Übungen.)

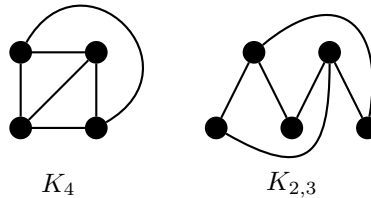
2.5 Planare Graphen

Ein planarer Graph kann so in der Ebene gezeichnet werden, dass sich keine Kanten überschneiden.

Definition 30 (*planar*)

Ein Graph G heißt **planar**, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren. Dabei werden die Knoten von G als Punkte und die Kanten von G als Verbindungslinien zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt. Ein **ebener** Graph ist ein in die Ebene eingebetteter Graph.

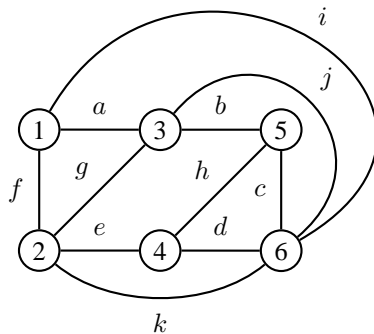
Wie die folgenden Einbettungen von K_4 und $K_{2,3}$ in die Ebene zeigen, sind K_4 und $K_{2,3}$ planar.



Durch die Kanten eines ebenen Graphen wird die Ebene in so genannte **Gebiete** unterteilt, von denen genau eines unbeschränkt ist und als **äußeres** Gebiet bezeichnet wird. Die Anzahl der Gebiete von G bezeichnen wir mit $r(G)$ oder kurz mit r . Der **Rand** eines Gebiets ist die Menge aller Kanten, die an dieses Gebiet grenzen. Bezeichnen wir die Anzahl der an ein Gebiet g grenzenden Kanten mit $d(g)$, wobei von g eingeschlossene Kanten doppelt gezählt werden, so gilt offensichtlich

$$\sum_{g \text{ Gebiet}} d(g) = i(G) = 2m(G).$$

Hierbei bezeichnet $i(G)$ die Anzahl aller Inzidenzen von Gebieten und Kanten, wobei jede Kante mit 2 Inzidenzen zu Buche schlägt. Ein ebener Graph wird durch das Tripel $G = (V, E, R)$ beschrieben, wobei R aus den Rändern aller Gebiete von G besteht.



$$R = \{\{a, f, g\}, \{a, i, j\}, \{b, h, e, g\}, \{b, c, j\}, \{c, d, h\}, \{e, d, k\}, \{f, i, k\}\}$$

Satz 31 (Euler, 1750)

Sei $G = (V, E, R)$ ein zusammenhängender ebener Graph. Dann gilt

$$n(G) - m(G) + r(G) = 2. \quad (*)$$

Beweis: Wir führen den Beweis durch Induktion über die Kantenzahl $m(G) = m$.

$m = 0$: Da G zusammenhängend ist, muss dann $n = 1$ sein. Somit ist auch $r = 1$, also (*) erfüllt.

$m = 1$: In diesem Fall muss $n = 2$ und $r = 1$ sein, weshalb (*) erfüllt ist.

$m - 1 \rightsquigarrow m$: Sei G ein zusammenhängender ebener Graph mit m Kanten.

1. Fall: G ist ein Baum. Nach Entfernen eines Blattes u ist der resultierende Graph $G - u$ immer noch zusammenhängend und eben, besteht jedoch aus $n - 1$ Knoten, $m - 1$ Kanten und r Gebieten. Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher $(n - 1) - (m - 1) + r = 2$, so dass (*) erfüllt ist.
2. Fall: G ist kein Baum. Sei $K = u_0, u_1, \dots, u_l$ ein Kreis in G . Nach Entfernen der Kante $\{u_0, u_1\}$ entsteht ein zusammenhängender ebener Graph mit $m - 1$ Kanten, n Knoten und $r - 1$ Gebieten. Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher $n - (m - 1) + (r - 1) = 2$, so dass (*) auch in diesem Fall erfüllt ist.

■

Korollar 32

Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Dann gilt $m \leq 3n - 6$.

Beweis: Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von G , wobei wir o.B.d.A. annehmen, dass G zusammenhängend ist. Da $n \geq 3$ ist, steuert jedes Gebiet g $d(g) \geq 3$ Kanten-Inzidenzen zur Gesamtzahl $i = \sum_g d(g)$ bei. Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 3r$ bzw. $r \leq 2m/3$ und es ergibt sich mit Eulers Formel

$$m = n + r - 2 \leq n + 2m/3 - 2,$$

was $m \leq 3n - 6$ impliziert. ■

Korollar 33

K_5 ist nicht planar.

Beweis: Wegen $n = 5$, also $3n - 6 = 9$ und wegen $m = \binom{5}{2} = 10$ gilt $m \not\leq 3n - 6$. ■

Korollar 34

Sei $G = (V, E)$ ein dreiecksfreier, planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Dann gilt $m \leq 2n - 4$.

Beweis: Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von G , wobei wir wieder o.B.d.A. annehmen können, dass G zusammenhängend ist. Wie im vorigen Beweis gilt $i = 2m$, wobei i die Anzahl der Inzidenzen von Kanten und Gebieten ist. Da $n \geq 3$ und G zusammenhängend und dreiecksfrei ist, steuert andererseits jedes Gebiet mindestens 4 Inzidenzen bei. Daher gilt $2m = i \geq 4r$ bzw. $r \leq m/2$ und es ergibt sich mit Eulers Formel

$$m = n + r - 2 \leq n + m/2 - 2,$$

was $m \leq 2n - 4$ impliziert. ■

Korollar 35

$K_{3,3}$ ist nicht planar.

Beweis: Wegen $n = 6$, also $2n - 4 = 8$ und wegen $m = 3 \cdot 3 = 9$ gilt $m \not\leq 2n - 4$. ■

Eine weitere interessante Folgerung ist die Existenz eines Knotens vom Grad ≤ 5 in einem planaren Graphen, von der wir im Beweis des 5-Farben-Satzes Gebrauch machen werden.

Lemma 36

Sei G ein planarer Graph. Dann ist $\delta(G) \leq 5$.

Beweis: Für $\|V\| \leq 6$ ist die Behauptung klar. Für $\|V\| > 6$ würde aus der Annahme $\delta(G) \geq 6$ sofort $\|E\| = \frac{1}{2} \sum_{u \in V} d(u) \geq \frac{1}{2} \sum_{u \in V} 6 = 3\|V\|$ folgen, was aber der Ungleichung $\|E\| \leq 3 \cdot \|V\| - 6$, die für planare Graphen mit mindestens drei Knoten gilt, widerspräche. ■

Definition 37 (Minor)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $u, v \in V$.

- Durch **Fusion** von u und v entsteht dann der Graph $G_{uv} = (V - \{v\}, E')$ mit

$$E' = \{e \in E \mid v \notin e\} \cup \{\{u, v'\} \mid \{v, v'\} \in E - \{u, v\}\}.$$

- Ist $e = \{u, v\}$ eine Kante von G (also $e \in E$), so sagen wir auch, G_{uv} entsteht aus G durch **Kontraktion** der Kante e und schreiben für G_{uv} auch G/e .
- Ein Graph H heißt **Minor** von G , wenn er durch ausschließliche Anwendung der drei Operationen Entfernen einer Kante, Kontraktion einer Kante und Entfernen eines isolierten Knotens entsteht.
- Sei v ein Knoten vom Grad 2 in G mit den beiden Nachbarknoten u und w , so entsteht der Graph $G' := (G - v) \cup \{u, w\}$ durch **Überbrückung** von v .
- G heißt **Unterteilung** von H , wenn H durch ausschließliche Anwendung der Operation Überbrückung aus G entsteht.

Kuratowski konnte 1930 beweisen, dass in jedem nichtplanaren Graphen G eine Unterteilung des $K_{3,3}$ oder des K_5 als Teilgraph enthalten sein muss. Einige Jahre später beobachtete Wagner, dass dann auch der $K_{3,3}$ oder der K_5 ein Minor von G sein muss.

Satz 38 (Kuratowski 1930, Wagner 1937)

Sei G ein Graph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- G ist planar,
- keine Unterteilung des $K_{3,3}$ oder K_5 ist ein Teilgraph von G ,
- weder $K_{3,3}$ noch K_5 ist ein Minor von G .

2.6 Färbung von Graphen und Landkarten

Definition 39 (chromatische Zahl)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $k \in \mathbb{N}$. Eine k -**Färbung** von G ist eine Abbildung $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ mit $c(u) \neq c(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$. Falls eine solche Abbildung existiert, heißt G k -**färbbar**.

Die **chromatische Zahl** von G ist

$$\chi(G) = \min\{k \geq 1 \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}.$$

Beispiel 40

$$\chi(E_n) = 1, \quad \chi(K_{n,m}) = 2, \quad \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 41

- (i) $\chi(G) \geq \omega(G)$,
- (ii) $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$,
- (iii) $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Beweis:

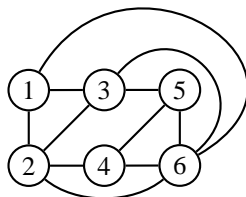
(i) ist klar.

(ii) Sei G ein Graph und sei c eine $\chi(G)$ -Färbung von G . Da dann die Mengen $S_i = \{u \in V \mid c(u) = i\}$, $i = 1, \dots, \chi(G)$, stabil sind, folgt $\|S_i\| \leq \alpha(G)$ und somit gilt

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} \|S_i\| \leq \chi(G)\alpha(G).$$

(iii) Betrachte folgenden Färbungsalgorithmus:

- 1 **Eingabe:** $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$
- 2 $c(v_1) \leftarrow 1$
- 3 **for** $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
- 4 $F \leftarrow \{c(v_j) \mid j < i, v_j \in \Gamma(v_i)\}$
- 5 $c(v_i) \leftarrow \min\{k \geq 1 \mid k \notin F\}$
- 6 **end**
- 7 **Ausgabe:** c

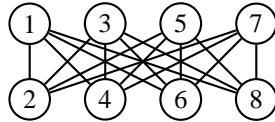


i	1	2	3	4	5	6
$c(v_i)$	1	2	3	1	2	4

Da zur Färbung von v_i höchstens $\|F\| \leq \Delta(G)$ Farben verboten sind, benutzt der Algorithmus nur Farben $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$. ■

Beispiel 42

Obiger Algorithmus benötigt zur Färbung von $K_{n,n}$ nur 2 Farben.



i	1	2	3	4	5	6	7	8
$c(v_i)$	1	2	1	2	1	2	1	2

Als nächstes betrachten wir folgendes Entscheidungsproblem.

k -FÄRBUNG:

Gegeben: Ein Graph G .

Gefragt: Ist G k -färbbar?

Satz 43

3-FÄRBUNG ist NP-vollständig.

Beweis: Wir zeigen $3\text{-SAT} \leq_p 3\text{-FÄRBUNG}$. Sei

$$F = \bigwedge_{i=1}^m \underbrace{\bigvee_{j=1}^3 l_{ij}}_{C_i}$$

mit $l_{ij} \in \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ eine 3-KNF-Formel, wobei Mehrfachvorkommen von Literalen in Klauseln zulässig sind. Gesucht ist ein Graph G_F , so dass G_F genau dann 3-färbbar ist, wenn F erfüllbar ist.

Wir bauen G_F aus $m + 1$ Teilgraphen H_0, H_1, \dots, H_m zusammen. Dabei ist H_0 der Graph (V_0, E_0) mit

$$V_0 = \{u, x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$$

$$E_0 = \{\{u, x_1\}, \dots, \{u, x_n\}, \{u, \bar{x}_1\}, \dots, \{u, \bar{x}_n\}, \{x_1, \bar{x}_1\}, \dots, \{x_n, \bar{x}_n\}\}$$

und für $i = 1, \dots, m$ ist H_i der Graph (V_i, E_i) mit

$$V_i = \{v, a_i, b_i, c_i, y_i, z_i\}$$

$$E_i = \{\{v, y_i\}, \{v, z_i\}, \{a_i, y_i\}, \{a_i, z_i\}, \{b_i, y_i\}, \{c_i, z_i\}, \{b_i, c_i\}\}$$

Nun bilden wir $G_F = (V, E)$, indem wir die Teilgraphen H_0, H_1, \dots, H_m vereinigen und die Kante $\{u, v\}$ sowie für jede Klausel C_i die Kanten $\{l_{i1}, a_i\}$, $\{l_{i2}, b_i\}$ und $\{l_{i3}, c_i\}$ hinzufügen:

$$V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_m$$

$$E = E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_m \cup \{\{u, v\}\} \cup \bigcup_{i=1}^m \{\{l_{i1}, a_i\}, \{l_{i2}, b_i\}, \{l_{i3}, c_i\}\}$$

Die folgende Behauptung ist eine unmittelbare Konsequenz aus der Konstruktion von H_0 .

Behauptung 44

Für jede 3-Färbung c von H_0 mit $c(u) = 2$ gilt $c(x_i) + c(\bar{x}_i) = 1$.

Auch die folgende Behauptung ist leicht zu beweisen.

Behauptung 45

Für jede 3-Färbung c von H_i mit $c(v) = 0$ gilt $0 \in \{c(a_i), c(b_i), c(c_i)\}$.

Ist nämlich c eine 3-Färbung von H_i mit $c(v) = 0$ und $0 \notin \{c(a_i), c(b_i), c(c_i)\}$, so können wir o.B.d.A. annehmen, dass $c(b_i) = 1$ und $c(c_i) = 2$ ist. Dies führt jedoch auf einen Widerspruch, da dann $c(y_i) = 2$ und $c(z_i) = 1$, also $c(a_i) = 0$ gelten muss.

Schließlich benötigen wir noch folgende Behauptung.

Behauptung 46

Seien $a', b', c' \in \{0, 1\}$ mit $a'b'c' \neq 000$. Dann gibt es eine 3-Färbung c von H_i mit

- $c(v) = 0$ und
- $c(a_i) \neq a', c(b_i) \neq b', c(c_i) \neq c'$.

Für den Beweis von Behauptung 3 betrachten wir die drei Fälle a) $b' = 1$, b) $b' = 0$, $c' = 1$, sowie c) $b' = c' = 0$, $a' = 1$. Im Fall a) leistet die 3-Färbung

v	a_i	b_i	c_i	y_i	z_i
0	2	0	2	1	1

das Gewünschte und im Fall c) leistet dies die 3-Färbung

v	a_i	b_i	c_i	y_i	z_i
0	0	2	1	1	2

Der Fall b) ist symmetrisch zum Fall a).

Mit Hilfe dieser drei Behauptungen fällt es nun leicht, die Äquivalenz

$$F \in 3\text{-SAT} \iff G_F \text{ ist 3-färbbar}$$

nachzuweisen.

„ \Rightarrow “: Sei $a = a_1 \cdots a_n$ eine erfüllende Belegung für F . Dann kann die Funktion

$$c : \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, u, v\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$$

mit

$$c(u) = 2, c(v) = 0, c(x_i) = a_i, c(\bar{x}_i) = 1 - a_i$$

nach Behauptung 3 zu einer 3-Färbung c' von G_F erweitert werden, da jede Klausel C_i ein Literal l_{ij} mit der Farbe $c(l_{ij}) = 1$ enthält.

„ \Leftarrow “: Ist c eine 3-Färbung von G_F , dann muss $c(u) \neq c(v)$ gelten. Daher existiert eine Permutation π auf $\{0, 1, 2\}$ mit $\pi(c(u)) = 2$ und $\pi(c(v)) = 0$. Folglich ist $c'(w) := \pi(c(w))$, $w \in V$, eine 3-Färbung von G_F mit $c'(u) = 2$ und $c'(v) = 0$.

Wegen Behauptung 1 ist dann $a = a_1 \cdots a_n$ mit $a_i := c(x_i)$ eine Belegung, die auf Grund von Behauptung 2 die Formel F erfüllt, da andernfalls $c'(l_{i1}) = c'(l_{i2}) = c'(l_{i3}) = 0$ für ein i und somit $\neq \{c'(a_i), c'(b_i), c'(c_i)\}$ gelten müsste. ■

Bereits im 19. Jahrhundert wurde die Vermutung aufgestellt, dass sich jede Landkarte mit höchstens 4 Farben so färben lässt, dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten. Offensichtlich lässt sich eine Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet. (Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, werden nicht als benachbart betrachtet.)

Diese Vermutung wurde 1878 von Kempe „bewiesen“. Erst 1890 entdeckte Heawood den Fehler, welcher in Kempes „Beweis“ enthalten war. Dabei entstand dann der 5-Farben-Satz. Dass die 4-Farben-Vermutung tatsächlich stimmt, wurde erst 1976 von Appel und Haken bewiesen. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen Beweis im klassischen Sinne, da zur Überprüfung der vielen auftretenden Spezialfälle Computer eingesetzt wurden.

Satz 47 (Appel, Haken 1976)

Jeder planare Graph $G = (V, E)$ ist 4-färbbar.

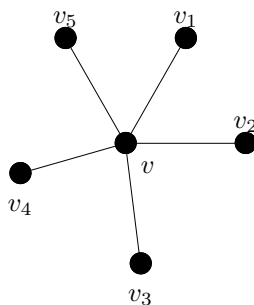
Satz 48 (Kempe 1878, Heawood 1890)

Jeder planare Graph $G = (V, E)$ ist 5-färbbar.

Beweis: Durch Induktion über $n = \|V\|$.

$n \leq 5$: Klar.

$n > 5$: Nach Lemma 36 existiert ein Knoten v mit $d(v) \leq 5$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine 5-Färbung c von $G - v$. Ist $\Gamma(v)$ durch c mit höchstens vier Farben gefärbt, so können wir c auf v fortsetzen. Andernfalls betrachten wir eine feste kreuzungsfreie Einbettung von G in die Ebene. Darin seien die Nachbarn v_1, v_2, \dots, v_5 von v in dieser Reihenfolge im Uhrzeigersinn um v angeordnet und es gelte o. B. d. A. $c(v_i) = i$.



1. Beweismöglichkeit:

Für Farben i und j bezeichne $G_{i,j}$ den Teilgraphen $G[\{u \in V \mid c(u) \in \{i, j\}\}]$ von G , der durch alle mit i oder j gefärbten Knoten induziert wird.

1. Fall: In $G_{1,3}$ existiert kein Weg von v_1 nach v_3 .

Dann lässt sich c zu einer Färbung c' mit $c'(v_1) = 3$ modifizieren, indem in der Zusammenhangskomponente von $G_{1,3}$, in welcher sich v_1 befindet, die Farben 1 und 3 vertauscht werden.

2. Fall: In $G_{1,3}$ existiert ein Weg von v_1 nach v_3 .

Dann kann es in $G_{2,4}$ keinen Weg von v_2 nach v_4 geben, d. h. c lässt sich zu einer Färbung c' mit $c'(v_2) = 4$ modifizieren.

In beiden Fällen benutzt c' für $\Gamma(v)$ nur vier Farben, so dass für u eine Farbe übrig bleibt.

2. Beweismöglichkeit:

Da G planar ist, ist in G kein K_5 enthalten, d. h. es existieren $i \neq j \in \{1, \dots, 5\}$ mit $\{v_i, v_j\} \notin E$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert für den Graph G' , der aus $G - v$ durch Identifikation von v_i mit v_j entsteht, eine 5-Färbung c . Trennen wir nun v_i wieder von v_j , so ist c immer noch eine 5-Färbung mit $c(v_i) = c(v_j)$, d. h. v kann mit der verbliebenen Farbe gefärbt werden. ■

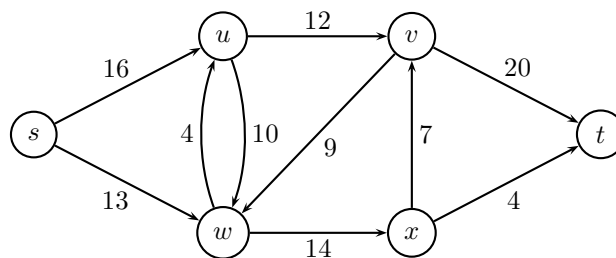
3 Netzwerke und der Heiratssatz

3.1 Flüsse in Netzwerken

Definition 49 (Netzwerk)

Ein **Netzwerk** $N = (V, E, s, t, c)$ besteht aus einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit zwei ausgezeichneten Knoten $s, t \in V$, der **Quelle** s und der **Senke** t , sowie einer **Kapazitätsfunktion** $c : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$ mit $c(u, v) = 0$ für alle $(u, v) \notin E$.

Die folgende Abbildung zeigt ein Netzwerk N .



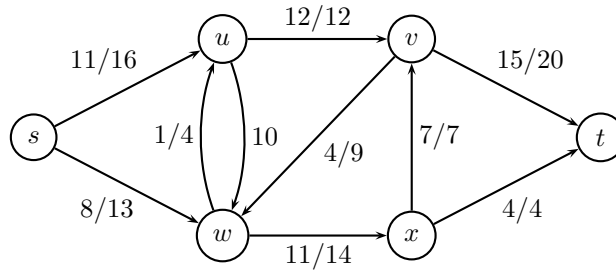
Definition 50 (Fluss)

Ein **Fluss** für N ist eine Funktion $f : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$ mit

- $f(u, v) \leq c(u, v)$, „Kapazitätsbedingung“
- $f(u, v) = -f(v, u)$, „Symmetriebedingung“
- Für alle $u \in V - \{s, t\}$: $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$. „Kontinuitätsbedingung“

Die **Größe** von f ist $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$.

Die folgende Abbildung zeigt einen Fluss f für das Netzwerk N .



Problemstellung: Wie lässt sich für ein gegebenes Netzwerk ein Maximalfluss, also ein Fluss mit maximaler Größe bestimmen?

Definition 51 (Restnetzwerk)

Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk und sei f ein Fluss für N . Das zugeordnete **Restnetzwerk** ist $N_f = (V, E_f, s, t, c_f)$, wobei

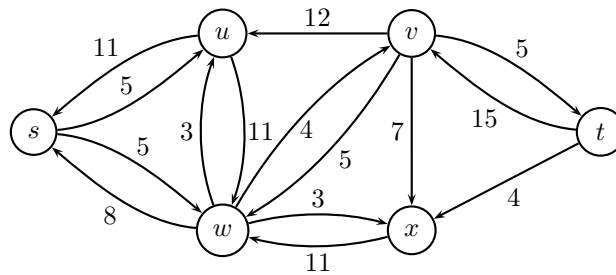
$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

und

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0\}$$

ist.

Die folgende Abbildung zeigt das Restnetzwerk N_f , das zum Netzwerk N und zum Fluss f gehört.



Definition 52 (Zunahmepfad)

Sei $N_f = (V, E_f, s, t, c_f)$ ein Restnetzwerk. Dann ist $P = s, u_1, \dots, u_{k-1}, t$ ein **Zunahmepfad** für N_f , falls P ein Pfad im Graphen (V, E_f) ist, d.h. die Knoten $s, u_1, \dots, u_{k-1}, t$ sind paarweise verschieden und es gilt

$$c_f(u_i, u_{i+1}) > 0$$

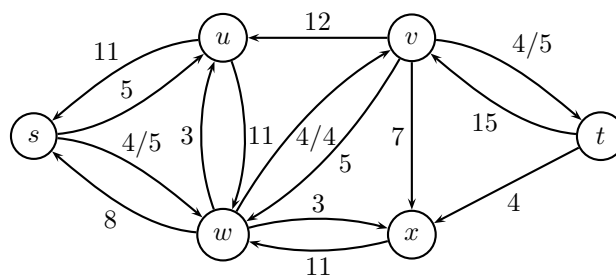
für $i = 0, \dots, k-1$, wobei $u_0 = s$ und $u_k = t$ ist. Die **Kapazität** von P in N_f ist

$$c_f(P) = \min\{c_f(u, v) \mid (u, v) \text{ liegt auf } P\}$$

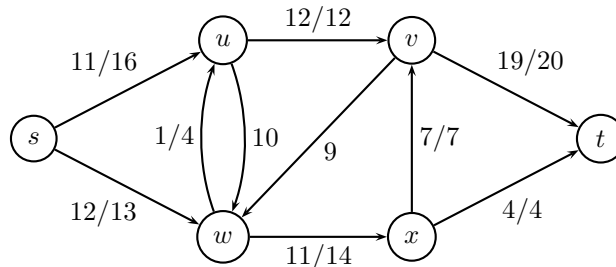
und der zu P gehörige Fluss in N_f ist

$$f_P(u, v) = \begin{cases} c_f(P), & (u, v) \text{ liegt auf } P, \\ -c_f(P), & (v, u) \text{ liegt auf } P, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die folgende Abbildung zeigt den zum Zunahmepfad $P = s, w, v, t$ gehörigen Fluss f_P in N_f . Die Kapazität von P ist $c_f(P) = 4$.



Es ist leicht zu sehen, dass f_P tatsächlich ein Fluss für N_f ist. Durch Addition der beiden Flüsse f und f_P erhalten wir einen größeren Fluss $f' = f + f_P$ für N mit dem Wert $|f'| = |f| + |f_P|$.



Nun können wir den **Ford-Fulkerson-Algorithmus** angeben:

- 1 **Eingabe:** Netzwerk $N = (V, E, s, t, c)$
- 2 setze $f(u, v) = 0$ für alle $(u, v) \in V \times V$
- 3 **while** es gibt einen Zunahmepfad P für N_f **do**
- 4 $f \leftarrow f + f_P$
- 5 **end**
- 6 **Ausgabe:** f

Frage: Berechnet der Algorithmus von Ford-Fulkerson tatsächlich einen Maximalfluss?

Um diese Frage bejahen zu können, müssen wir zeigen, dass f ein Maximalfluss ist, falls es im Restnetzwerk N_f keinen Zunahmepfad mehr gibt.

Definition 53 (Schnitt)

Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk. Dann heißt $S \subseteq V$ ein **Schnitt** durch N , falls $s \in S$ und $t \notin S$. Die **Kapazität** eines Schnittes S ist

$$c(S) = \sum_{u \in S, v \in T} c(u, v)$$

Ist f ein Fluss für N , so heißt

$$f(S) = \sum_{u \in S, v \in T} f(u, v)$$

der **Fluss über den Schnitt S** .

Lemma 54

Für jeden Schnitt S und jeden Fluss f gilt:

1. $f(S) \leq c(S)$
2. $f(S) = |f|$

Beweis: zu 1:

$$f(S) = \sum_{u \in S, v \in V-S} \underbrace{f(u, v)}_{\leq c(u, v)} \leq \sum_{u \in S, v \in V-S} c(u, v) = c(S)$$

zu 2: Wir führen einen Induktionsbeweis über $\|S\| = k$ durch.

Induktionsanfang: Für $\|S\| = 1$ ist die Behauptung klar.

Induktionsschritt: Sei \hat{S} ein Schnitt mit $\|\hat{S}\| = k + 1$. Wähle einen Knoten $\hat{u} \in \hat{S} - \{s\}$ und betrachte den Schnitt $S = \hat{S} - \{\hat{u}\}$. Wegen

$$f(\hat{S}) = \sum_{u \in \hat{S}, v \in V-\hat{S}} f(u, v) = \sum_{u \in S, v \in V-\hat{S}} f(u, v) + \sum_{v \in V-\hat{S}} f(\hat{u}, v)$$

und

$$f(S) = \sum_{u \in S, v \in V-S} f(u, v) = \sum_{u \in S, v \in V-\hat{S}} f(u, v) + \sum_{u \in S} f(u, \hat{u})$$

folgt

$$f(\hat{S}) - f(S) = \sum_{v \in V-\hat{S}} f(\hat{u}, v) - \sum_{u \in S} f(u, \hat{u}) = \sum_{v \in V} f(\hat{u}, v) = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt daher $f(\hat{S}) = f(S) = |f|$. ■

Satz 55 (Min-Cut-Max-Flow-Theorem)

Sei f ein Fluss für $N = (V, E, s, t, c)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist maximal.
2. In N_f existiert kein Zunahmepfad.
3. Es gibt einen Schnitt S mit $c(S) = |f|$.

Beweis:

„1 \Rightarrow 2“: Würde ein Zunahmepfad existieren, so könnte f verbessert werden, was ein Widerspruch wäre.

„2 \Rightarrow 3“: Betrachte den Schnitt S mit

$$S = \{u \in V \mid u \text{ ist in } N_f \text{ von } s \text{ aus erreichbar}\}$$

Dann gilt:

- $s \in S$
- $t \notin S$, da kein Zunahmepfad existiert
- $c_f(u, v) = 0$ für alle $u \in S$ und $v \in V - S$. Wegen $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$ folgt somit

$$|f| = f(S) = \sum_{u \in S, v \in V - S} f(u, v) = \sum_{u \in S, v \in V - S} c(u, v) = c(S).$$

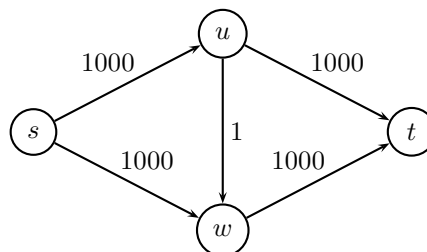
„3 \Rightarrow 1“: Klar, da für jeden Fluss f' gilt:

$$|f'| \leq c(S) = |f|.$$

■

Bemerkung 56

Da die while-Schleife des Ford-Fulkerson-Algorithmus $\leq C$ -mal durchlaufen wird, wobei $C = c(\{s\}) = \sum_{v \in V} c(s, v)$ die Kapazität des Schnittes $S = \{s\}$ ist, ist leicht zu sehen, dass die Laufzeit polynomiell in der Knotenzahl n , der Kantenzahl m und in C ist. Da der Wert von C jedoch exponentiell in der Länge der Eingabe (also der Beschreibung des Netzwerkes N) sein kann, kann auch die Laufzeit von Ford-Fulkerson exponentiell sein, wie das folgende Beispiel zeigt:



Bei diesem Netzwerk benötigt Ford-Fulkerson abhängig von der Wahl des Zunahmepfades zwischen 2 und 2000 Schleifendurchläufe zur Bestimmung des Maximalflusses.

Dies lässt sich (nicht nur in diesem Beispiel) wie folgt vermeiden:

- Man betrachtet nur Zunahmepfade mit einer geeignet gewählten Mindestkapazität. Dies führt auf eine Laufzeit, die polynomiell in n , m und $\log c(\{s\})$ ist.
- Man bestimmt in jeder Iteration einen kürzesten Zunahmepfad. Diese Vorgehensweise wird als **Edmonds-Karp-Strategie** bezeichnet und führt auf eine polynomiale Laufzeit in n und m (unabhängig von der Kapazitätsfunktion c).

3.2 Matchings und der Heiratssatz

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, dessen Knotenmenge V eine Gruppe von hereitswilligen Personen darstellt, wobei die Möglichkeit einer Heirat zwischen u und w durch eine Kante $\{u, w\}$ modelliert wird. Sind Vielehen ausgeschlossen, so lässt sich jedes mögliche Heiratsarrangement durch ein Matching beschreiben.

Definition 57 (Matching)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heißt **Matching** in G , falls M kein inzidentes Kantenpaar enthält:

$$\forall e, e' \in M : e \neq e' \Rightarrow e \cap e' = \emptyset.$$

- Die Matchingzahl von G ist

$$\mu(G) = \max\{\|M\| \mid M \text{ ist ein Matching in } G\}$$

- Ein Matching M heißt **maximal**, falls $\|M\| = \mu(G)$ ist. M heißt **gesättigt**, falls es in keinem größeren Matching enthalten ist.
- Für eine Knotenmenge $U \subseteq V$ und eine Kantenmenge $F \subseteq E$ bezeichne

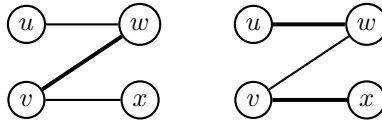
$$U_F = \{u \in U \mid \exists v \in V : \{u, v\} \in F\}$$

die Menge der von F in U überdeckten Knoten. Dann heißt ein Matching M **perfekt**, falls $V_M = V$ ist.

Offensichtlich ist $M \subseteq E$ genau dann ein Matching, wenn $\|V_M\| = 2\|M\|$ ist. Das Ziel besteht nun darin, ein maximales Matching M in G zu finden. Häufig ist G bipartit, d.h. V lässt sich in zwei Knotenmengen U und W mit $E(U, W) = E$ zerlegen.

Beispiel 58

Ein gesättigtes Matching muss nicht maximal sein:



$M = \{\{v, w\}\}$ ist gesättigt, da es sich nicht erweitern lässt. M ist jedoch kein maximales Matching, da $M' = \{\{v, x\}, \{u, w\}\}$ größer ist. Die Greedy-Methode, ausgehend von $M = \emptyset$ solange Kanten zu M hinzuzufügen, bis sich M nicht mehr zu einem größeren Matching erweitern lässt, funktioniert also nicht.

Satz 59

Für einen bipartiten Graphen G kann ein maximales Matching in Polynomialzeit berechnet werden.

Beweis: Wir reduzieren das Auffinden eines maximalen Matchings in G auf folgendes Flussproblem:

Sei $G = (U, W, E)$. Betrachte das Netzwerk $N(G) = (V', E', s, t, c)$ mit

- $V' = U \dot{\cup} W \dot{\cup} \{s, t\}$,
- $E' = \{(s, u) \mid u \in U\} \cup \{(u, w) \in U \times W \mid \{u, w\} \in E\} \cup \{(w, t) \mid w \in W\}$
und
- $c(e) = 1$ für alle $e \in E'$.

Dann können wir jedem Fluss f in $N(G)$ ein Matching $M_f = \{\{u, w\} \in E \mid f(u, w) = 1\}$ mit $\|M_f\| = |f|$ zuordnen. Umgekehrt entspricht einem Matching M der Fluss

$$f_M(v, v') = \begin{cases} 1, & (v, v') \in E_M \\ -1, & (v', v) \in E_M \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

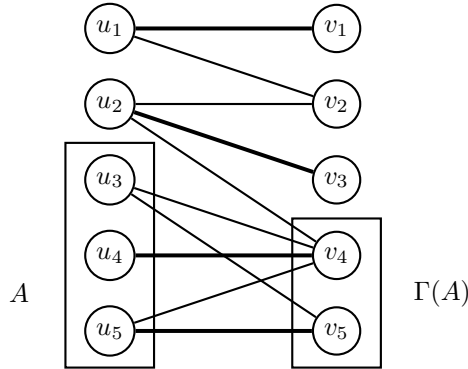
$$E_M = \{(s, u) \mid u \in U_M\} \cup \{(u, w) \in U \times W \mid \{u, w\} \in M\} \cup \{(w, t) \mid w \in W_M\},$$

ist. Da der Ford-Fulkerson Algorithmus einen maximalen Fluss f in $N(G)$ liefert, ist das zugehörige Matching M_f maximal. Da die Größe $|f|$ von f durch die Anzahl der Knoten in U beschränkt ist, wird die while-Schleife des Ford-Fulkerson Algorithmus höchstens $\|U\|$ -mal durchlaufen, was auf eine polynomielle Laufzeit führt. ■

Wie der Beweis des nächsten Lemmas zeigt, bestimmt der Ford-Fulkerson-Algorithmus im Fall $\mu(G) < \|U\|$ eine Teilmenge $A \subseteq U$, die nur $\|\Gamma(A)\| = \|A\| - (\|U\| - \mu(G))$ Nachbarn hat. Da jedes Matching M maximal $\|\Gamma(A)\|$ Knoten in A überdecken kann, liefert der Ford-Fulkerson-Algorithmus durch die Angabe von A einen Beweis für die Maximalität des gefundenen Matchings.

Beispiel 60

Der folgende bipartite Graph G enthält ein Matching M der Größe 4. Wegen $\Gamma(\{u_3, u_4, u_5\}) = \{w_2, w_4\}$ kann es offensichtlich kein größeres Matching in G geben, d.h. M ist maximal.

**Lemma 61**

In jedem bipartiten Graphen $G = (U, W, E)$ gibt es eine Teilmenge A von U mit $\|A\| - \|\Gamma(A)\| = \|U\| - \mu(G)$ und daher gilt

$$\mu(G) = \|U\| - \max_{A \subseteq U} (\|A\| - \|\Gamma(A)\|).$$

Beweis: Es ist klar, dass $\|U\| - \mu(G) \geq \|A\| - \|\Gamma(A)\|$ für jede Teilmenge A von U ist, da jedes Matching M für die Knoten in A maximal $\|\Gamma(A)\|$ Partner finden kann, weshalb mindestens $\|A\| - \|\Gamma(A)\|$ Knoten in U keinen Partner erhalten. Es reicht also, die Existenz einer Menge A mit $\|A\| - \|\Gamma(A)\| \geq \|U\| - \mu(G)$ nachzuweisen. Da der maximale Fluss f in dem zu G gehörigen Netzwerk $N(G)$ die Größe $|f| = \mu(G)$ hat, impliziert das Min-Cut-Max-Flow-Theorem die Existenz eines Schnittes S der Kapazität $c(S) = \mu(G)$. Wir wählen für A die Menge $U \cap S$. Da in die Berechnung von $c(S)$ alle Kanten (s, u) mit $u \in U - S$ und für jeden Knoten $w \in \Gamma(U \cap S)$ entweder die Kante (w, t) (im Fall $w \in S$) oder eine Kante (u, w) mit $u \in U \cap S$ (im Fall $w \notin S$) eingehen, folgt

$$\mu(G) = c(S) \geq \|U - S\| + \|\Gamma(S \cap U)\| = \|U\| - \|A\| + \|\Gamma(A)\|.$$

■

Eine unmittelbare Folgerung aus obigem Lemma ist folgende Charakterisierung von bipartiten Graphen, bei denen alle Knoten in U einen Partner finden können.

Satz 62 (Heiratssatz von Hall)

Für einen bipartiten Graphen $G = (U, W, E)$ gilt genau dann $\mu(G) = \|U\|$, wenn für alle Teilmengen A von U $\|\Gamma(A)\| \geq \|A\|$ ist.

4 Die Greedy-Methode und Matroide

4.1 Kürzeste Wege

Gegeben ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit einem **Startknoten** $s \in V$ und einem **Zielknoten** $t \in V$, sowie eine Längenfunktion $l : E \rightarrow \mathbb{N}$. Die Aufgabe, einen möglichst kurzen Weg von s nach t zu finden, wird durch folgenden nach Dijkstra benannten Algorithmus in Polynomialzeit gelöst.

```
1  Eingabe: gerichteter Graph  $G = (V, E)$  mit  $s, t, l$  wie oben
2   $g(s) \leftarrow 0$ 
3  for all  $u \in V - \{s\}$  do
4   $g(u) \leftarrow \infty$ 
5  end
6   $S \leftarrow \emptyset$ 
7   $T \leftarrow V$ 
8  while  $t \in T$  do
9  Finde  $u \in T$  mit  $g(u)$  minimal
10  $T \leftarrow T - \{u\}$ 
11  $S \leftarrow S \cup \{u\}$ 
12 for all  $v \in \Gamma(u) \cap T$  do
13 if  $g(u) + l(u, v) < g(v)$  then
14  $g(v) \leftarrow g(u) + l(u, v)$ 
15  $\alpha(v) \leftarrow u$ 
16 end
17 end
18 end
19 Ausgabe: Weg  $u_0, \dots, u_k$  mit  $u_k = t$ ,  $\alpha(u_i) = u_{i-1}$  für  $i = 1, \dots, k$ 
    und  $u_0 = s$  (natürlich nur, falls  $g(t) < \infty$  ist)
```

Natürlich können wir mit dem **Dijkstra-Algorithmus** auch kürzeste Wege zu allen Knoten $u \in V$ bestimmen, falls wir die while-Bedingung $t \in T$ durch $T \neq \emptyset$ ersetzen.

Für einen Knoten $u \in V$ sei $\sigma(u)$ die Länge eines kürzesten Weges von s nach u . Falls in G kein Weg von s nach t existiert, sei $\sigma(u) = \infty$. Das folgende Lemma beweist die

Korrektheit des Dijkstra-Algorithmus’.

Lemma 63

Für jeden Knoten $u \in S$ gilt $g(u) = \sigma(u)$. Im Fall $g(u) < \infty$ ist zudem u_0, \dots, u_k mit $u_k = u$, $u_{i-1} = \alpha(u_i)$ für $i = 1, \dots, k$ und $u_0 = s$ ein s - u -Weg der Länge $g(u)$.

Beweis: Wir beweisen das Lemma durch Induktion über die Größe von S .

Induktionsanfang: Im Fall $\|S\| = 1$ ist $S = \{s\}$ und $g(s) = 0 = \sigma(s)$.

Induktionsschritt: Sei u ein Knoten, der zu S neu hinzukommt und gelte die Aussage für alle Knoten u' , die bereits in S enthalten sind.

1. Fall: $g(u) = \infty$. Sei u' der erste Knoten, der mit dem Wert $g(u') = \infty$ zu S hinzugefügt wird. Dann gilt zum Zeitpunkt der Hinzunahme von u' zu S :

$$g(v) = \begin{cases} \sigma(v) < \infty, & v \in S, \\ \infty, & v \in T. \end{cases}$$

Da zu diesem Zeitpunkt alle Knoten in $\Gamma(S)$ bereits einen endlichen Wert $g(v)$ erhalten haben, kann keine Kante von einem Knoten in S zu einem Knoten in T existieren, d.h. u ist von s aus nicht erreichbar.

2. Fall: $g(u) < \infty$. Wir zeigen zuerst, dass α einen s - u -Weg der Länge $g(u)$ liefert. Sei u' der Knoten, bei dessen Hinzunahme zu S $g(u)$ auf den endgültigen Wert $g(u) = g(u') + l(u', u)$ gesetzt wird. Nach Induktionsvoraussetzung liefert α einen s - u' -Weg der Länge $g(u')$, welcher sich durch Hinzufügen der Kante (u', u) zu einem s - u -Weg der Länge $g(u)$ erweitern lässt.

Die Existenz eines s - u -Weges der Länge $g(u)$ zeigt bereits $g(u) \geq \sigma(u)$. Es ist also nur noch $g(u) \leq \sigma(u)$ zu zeigen. Sei v_0, \dots, v_k ein kürzester Weg von $s = v_0$ nach $u = v_k$. Dann ist $\sigma(v_{i+1}) = \sum_{j=0}^i l(v_j, v_{j+1})$ und daher

$$\sigma(v_i) + l(v_i, v_{i+1}) = \sigma(v_{i+1}) \leq \sigma(u) \quad (4.1)$$

für $i = 0, \dots, k - 1$. Weiterhin sei v_i der letzte Knoten auf diesem Weg, der vor u aus T entfernt wird. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$g(v_i) = \sigma(v_i). \quad (4.2)$$

Da der Knoten v_{i+1} nicht vor u aus T entfernt wird, folgt

$$g(u) \leq g(v_{i+1}). \quad (4.3)$$

Da $v_{i+1} \in \Gamma(v_i) \cap T$, wenn v_i aus T entfernt wird, ist

$$g(v_{i+1}) \leq g(v_i) + l(v_i, v_{i+1}). \quad (4.4)$$

Daher folgt

$$\begin{array}{ccccc} g(u) \leq g(v_{i+1}) & \leq & g(v_i) + l(v_i, v_{i+1}) & = & \sigma(v_i) + l(v_i, v_{i+1}) \leq \sigma(u). \\ (4.3) & & (4.4) & & (4.1) \end{array}$$



Die Laufzeit des Dijkstra-Algorithmus' ist $O(n^2)$, da die while-Schleife höchstens n -mal durchlaufen wird und ein Knoten u mit minimalem g -Wert in Zeit $O(n)$ gefunden werden kann. Zu beachten ist hierbei, dass in der for-Schleife insgesamt jede Kante nur einmal betrachtet wird, weshalb sie nur mit $O(m) = O(n^2)$ zur Laufzeit beiträgt.

4.2 Matroide

Definition 64 (Matroid)

Sei M eine endliche Menge und sei $X \subseteq \mathcal{P}(M)$ ein System von Teilmengen von M . Dann heißt (M, X) **Matroid**, falls gilt:

- $\emptyset \in X$,
- $A \subseteq B, B \in X \Rightarrow A \in X$ (X ist unter Teilmengenbildung abgeschlossen) und
- $A, B \in X, \|A\| < \|B\| \Rightarrow \exists b \in B - A : A \cup \{b\} \in X$.
(Austauscheigenschaft)

Bemerkung 65

Bezeichne X_{max} das System aller bzgl. \subseteq maximalen Mengen in X . Aufgrund der Austauscheigenschaft müssen dann alle Mengen $A \in X_{max}$ dieselbe Mächtigkeit haben. Man beachte, dass dies zwar eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für das Vorliegen der Austauscheigenschaft ist, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel 66

- Sei $M = \{1, \dots, 4\}$. Dann bildet zwar M zusammen mit

$$X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$$

ein Matroid, nicht jedoch

$$X' = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\},$$

obwohl alle Mengen in $X'_{max} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ dieselbe Mächtigkeit haben.

- Sei $M = \{1, \dots, m\}$. Dann bildet für $k \in \{0, \dots, m\}$ das Paar (M, X_k) mit

$$X_k = \{A \subseteq M \mid \|A\| \leq k\}$$

ein Matroid.

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei

$$M(G) = \{E' \subseteq E \mid E' \text{ ist ein Matching in } G\}.$$

Betrachte die beiden Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V, E')$.



Dann ist $(E, M(G))$ zwar ein Matroid, nicht jedoch $(E', M(G'))$.

- Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Dann ist (E, X) mit

$$X = \{E' \subseteq E \mid (V, E') \text{ ist zyklensfrei}\}$$

ein Matroid. Die ersten beiden Eigenschaften sind leicht zu sehen. Zum Nachweis der Austauscheigenschaft seien A und B zyklenfreie Kantenmengen mit $\|A\| < \|B\|$. Dann zerlegt die Kantenmenge A die Knotenmenge V in $k \geq 1$ Zusammenhangskomponenten V_1, \dots, V_k . Jede Kante in B verbindet nun entweder zwei Knoten aus derselben Komponente V_i oder zwei Knoten aus verschiedenen Komponenten V_i und V_j . Da B höchstens $\sum_{i=1}^k (\|V_i\| - 1) = \|A\|$ Kanten des ersten Typs enthalten kann, muss B mindestens eine Kante e des 2. Typs enthalten. Dann ist aber $A \cup \{e\}$ zyklenfrei und damit in X .

Für $E' \subseteq E$ heißt $G' = (V, E')$ **aufspannender Baum** von G , falls G' ein Baum ist. Es ist klar, dass $G' = (V, E')$ genau dann ein aufspannender Baum von G ist, wenn $E' \in X_{max}$ ist.

Sei nun $g : M \rightarrow \mathbb{Z}$ eine beliebige Gewichtsfunktion auf M . Gesucht ist eine Menge T in X_{max} mit maximalem (bzw. minimalem) Gewicht

$$g(T) = \sum_{m \in T} g(m).$$

Die Greedy-Strategie versucht diese Aufgabe dadurch zu lösen, dass sie ausgehend von der leeren Menge jeweils das Element mit dem größtmöglichen Gewicht zu T hinzufügt.

- 1 **Eingabe:** (M, X, g) wie oben beschrieben
- 2 $T \leftarrow \emptyset$
- 3 **for** $i \leftarrow 1$ **to** $\|M\|$ **do**
- 4 **Bestimme ein** m_i **in** $M - \{m_1, \dots, m_{i-1}\}$ **mit maximalem Gewicht**
- 5 **if** $T \cup \{m_i\} \in X$ **then**
- 6 $T \leftarrow T \cup \{m_i\}$

7 **end**
 8 **end**
 9 **Ausgabe:** T

Wie der folgende Satz zeigt, ist der Greedy-Algorithmus tatsächlich erfolgreich, falls die zugrunde liegende Struktur ein Matroid ist.

Satz 67

Falls (M, X) ein Matroid ist, gibt der Greedy-Algorithmus eine Menge T in X_{max} mit maximalem Gewicht aus.

Beweis: Sei $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ mit $g(m_1) \geq \dots \geq g(m_n)$ und sei $T = \{m_{i_1}, \dots, m_{i_k}\}$ die vom Greedy-Algorithmus berechnete Lösung mit $i_1 < \dots < i_k$.

Wir zeigen zunächst $T \in X_{max}$. Würde ein $B \in X$ mit $T \subsetneq B$ existieren, so müsste B ein Element m_i mit $i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ enthalten. Sei i der kleinste solche Index und sei j der größte Index mit $i_j < i$. Dann hätte aber m_i wegen

$$\{m_{i_1}, \dots, m_{i_j}, m_i\} \subseteq B \in X$$

zu T hinzugefügt werden müssen.

Wir müssen noch zeigen, dass $g(T)$ maximal ist. Hierzu nehmen wir an, es würde ein $B = \{m_{j_1}, \dots, m_{j_k}\} \in X_{max}$ mit $j_1 > \dots > j_k$ und $g(B) > g(T)$ existieren. Dann muss B ein Element m_{j_l} mit $g(m_{j_l}) > g(m_{i_l})$ (und somit $j_l < i_l$) enthalten. Sei l der kleinste solche Index. Wenden wir nun die Austauscheigenschaft auf die beiden Mengen

$$A' = \{m_{i_1}, \dots, m_{i_{l-1}}\} \text{ und } B' = \{m_{j_1}, \dots, m_{j_l}\}$$

an, so muss $B' - A'$ ein Element m_{j_k} mit $A' \cup \{m_{j_k}\} \in X$ enthalten. Wegen

$$g(m_{j_k}) \geq g(m_{j_l}) > g(m_{i_l})$$

hätte dann aber das Element m_{j_k} vor m_{i_l} zu T hinzugefügt werden müssen. ■

Wie der vorige Satz zeigt, stellt die Austauscheigenschaft eine hinreichende Bedingung für das Auffinden einer optimalen Lösung durch den Greedy-Algorithmus dar. Tatsächlich ist sie auch notwendig: Ist die Austauscheigenschaft für zwei Mengen A und B in X nicht erfüllt (es gilt also $\|A\| < \|B\|$ und $A \cup \{b\} \notin X$ für alle $b \in B - A$), so gibt der Greedy-Algorithmus für die Gewichtsfunktion

$$g(m) = \begin{cases} \|B\| + 1, & m \in A, \\ \|B\|, & m \in B - A, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Menge $T \supseteq A$ mit dem Gewicht $g(T) = (\|B\| + 1)\|A\| \leq (\|B\| + 1)(\|B\| - 1) = \|B\|^2 - 1$ aus, obwohl $g(B) = \|B\|^2$ ist und daher jede Obermenge von B in X_{max} ein größeres Gewicht als T besitzt.

Beispiel 68

Wie wir gesehen haben, enthält X_{max} alle aufspannenden Bäume von $G = (V, E)$, falls wir das Matroid (E, X) mit

$$X = \{E' \subseteq E \mid (V, E') \text{ ist zyklensfrei}\}$$

zugrundelegen. Ist daher $g : E \rightarrow \mathbb{Z}$ eine beliebige Gewichtsfunktion auf E , so berechnet der Greedy-Algorithmus einen aufspannenden Baum mit maximalem (bzw. minimalem) Gesamtgewicht. Die Variante, bei der das Gesamtgewicht minimiert werden soll, ist auch als Kruskal-Algorithmus bekannt:

```

1  Eingabe:  $(V, E, g)$  wie oben beschrieben
2   $T \leftarrow \emptyset$ 
3  for  $i \leftarrow 1$  to  $\|E\|$  do
4    Bestimme eine Kante  $e_i$  in  $E - \{e_1, \dots, e_{i-1}\}$  mit minimalem Gewicht
5    if  $T \cup \{e_i\}$  ist zyklensfrei then
6       $T \leftarrow T \cup \{e_i\}$ 
7    end
8  end
9  Ausgabe:  $T$ 

```

Auch der Dijkstra-Algorithmus zur Bestimmung von kürzesten Wegen von einem Knoten $s \in V$ zu allen Knoten in einem Graphen $G = (V, E)$ mit einer Längenfunktion $l : E \rightarrow \mathbb{N}$ verfährt nach der Greedy-Strategie. Das zugrunde liegende Matroid (M, X) wird hierbei allerdings nicht direkt auf der Kantenmenge E von G , sondern auf der Menge M aller von s ausgehenden zyklensfreien Pfade in G gebildet: X enthält alle Teilmengen von M , deren Pfade auf verschiedene Endknoten in G führen. Nun ist leicht zu sehen, dass der Dijkstra-Algorithmus in jedem Schleifendurchlauf einen Pfad in M zu einem neuen Knoten bestimmt, dessen Länge minimal ist. Anders als der kanonische Greedy-Algorithmus durchläuft der Dijkstra-Algorithmus hierzu jedoch nicht alle Pfade in M , wodurch er wesentlich effizienter ist.