

Probeklausur Theoretische Informatik 3

Aufgabe 1

[26 Punkte]

Auf der Menge Σ^* aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ sei folgende Relation \sqsubseteq gegeben:

$$x \sqsubseteq y \iff x \text{ ist Präfix von } y \text{ oder } x \text{ ist Suffix von } y.$$

- Welche der Eigenschaften Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität erfüllt die Relation \sqsubseteq auf Σ^* ? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Sei A die Menge $\{\epsilon, ab, ba, aab, abba, baab\}$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung \sqsubseteq_A von \sqsubseteq auf A eine Ordnung ist.
- Zeichnen Sie das Hassediagramm für (A, \sqsubseteq_A) .
- Bestimmen Sie alle größten, kleinsten, maximalen und minimalen Elemente von A in (A, \sqsubseteq_A) .
- Bestimmen Sie Infimum und Supremum, sowie alle oberen und unteren Schranken von $H = \{ab, ba\}$ in (A, \sqsubseteq_A) .
- Lässt sich A um ein Wort $x \in \Sigma^*$ zu einer Menge $B = A \cup \{x\}$ erweitern, so dass (B, \sqsubseteq_B) eine Ordnung ist, in der H sowohl ein Infimum als auch ein Supremum besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

[24 Punkte]

Die **symmetrische Differenz** von zwei Mengen A und B ist

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Betrachten Sie nachfolgende Relationen zwischen Mengen von natürlichen Zahlen, d.h. der Grundbereich ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ von \mathbb{N} .

$$R = \{(A, B) \mid A \cup B \subseteq A \cap B\},$$

$$S = \{(A, B) \mid \|A \Delta B\| = \|A \cap B\|\},$$

$$T = \{(A, B) \mid \|A \Delta B\| \text{ ist endlich}\}.$$

- Welche der Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität liegen bei den Relationen R , S und T vor? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Geben Sie für jede Äquivalenzrelation in $\{R, S, T\}$ die durch die Mengen $A = \emptyset$, $B = \{1, 2, \dots, 1000\}$ und $\overline{B} = \mathbb{N} - B$ repräsentierten Äquivalenzklassen an.

Aufgabe 3

[10 Punkte]

a) Zeigen Sie für eine beliebige reflexive Relation R die Äquivalenz

$$R^3 \subseteq R \iff R \text{ ist transitiv.}$$

b) Gilt diese Äquivalenz auch ohne die Voraussetzung, dass R reflexiv ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4

[10 Punkte]

Betrachten Sie folgende Probleme L_k für $k = 2$ und $k = 3$.

Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$.

Gefragt: Können die Knoten von G so mit k Farben gefärbt werden, dass

- benachbarte Knoten verschiedene Farben erhalten und
- eine Menge $A \subseteq V$ von Knoten existiert, so dass alle Knoten in A dieselbe Farbe haben und A weniger als $\|A\|$ Nachbarn hat (d.h. für $\Gamma(A) := \{b \in V \mid \exists a \in A : \{a, b\} \in E\}$ ist $\|\Gamma(A)\| < \|A\|$)?

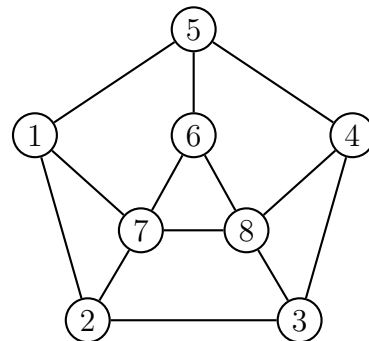
Untersuchen Sie, ob dieses Problem für $k = 2$ bzw. $k = 3$ in P liegt oder NP-vollständig ist. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 5

[20 Punkte]

Betrachten Sie den nebenstehenden Graphen G .

1. Wie groß ist die chromatische Zahl $\chi(G)$?
2. Wie groß ist die Cliquenzahl $\omega(G)$?
3. Wie groß ist die Stabilitätszahl $\alpha(G)$?
4. Wie groß ist die Überdeckungsanzahl $\beta(G)$?
5. Besitzt G einen Hamiltonkreis?
6. Besitzt G einen Eulerkreis?
7. Wieviele Kanten müssen zu G mindestens hinzugefügt werden, um einen nicht planaren Graphen zu erhalten?



Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.