

## Theoretische Informatik 3

### 5. Übung

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis zum 1. Juli 2005

#### Aufgabe 33

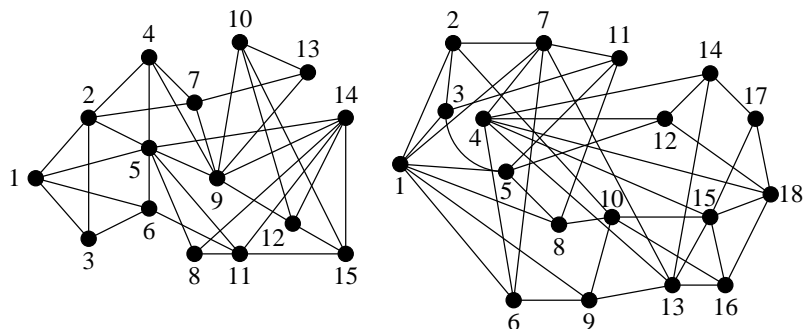
[mündlich]

1. Sind alle 4-färbbaren Graphen planar? Beweisen Sie ihre Behauptung.
2. Geben Sie einen Algorithmus an, mit dem man effizient überprüfen kann, ob ein gegebener Graph bipartit, d. h. 2-färbbar, ist.
3. Was ist die chromatische Zahl eines Baumes? Geben Sie einen Beweis für ihre Behauptung an.

#### Aufgabe 34

[4 Punkte]

Sind die nebenstehenden Graphen planar? Geben Sie eine Begründung unter Benutzung des Satzes von Kuratowski an. (Verwenden Sie dabei die vorgegebene Nummerierung der Knoten.)



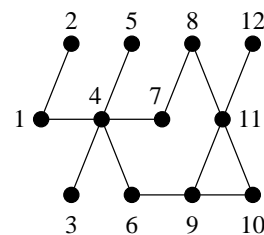
#### Aufgabe 35

[mündlich]

Im Folgenden betrachten wir den Tiefensuche-Algorithmus. Vor dem ersten Aufruf von TIEFENSUCHE haben alle Knoten die Farbe weiss. Die Prozedur TIEFENSUCHE wird mit einem Graphen und einem (beliebigen) Knoten dieses Graphen aufgerufen.

```

TIEFENSUCHE( $G, v$ )
  Farbe[ $v$ ] ← grau
  foreach  $u \in V$  : es gibt eine Kante von  $v$  nach  $u$  do
    if Farbe[ $u$ ] = weiss then
      TIEFENSUCHE( $G, u$ )
  Farbe[ $v$ ] ← schwarz
    
```

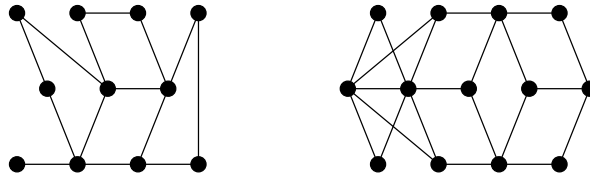


1. Geben Sie für obigen Graphen die Reihenfolge an, in der die Knoten (und Kanten) bei einer Tiefensuche beginnend bei Knoten 1 durchlaufen werden. Bei Wahlmöglichkeit soll zunächst der Nachbarknoten mit der kleinsten Nummer gewählt werden.
2. Was bedeuten die Farben weiss, grau und schwarz im Verlauf des Algorithmus?
3. Wie kann man den Algorithmus modifizieren, um festzustellen, ob der Eingabegraph einen Kreis enthält? (Hinweis: Welche Farbe besitzt der Knoten, bei dem sich während der Tiefensuche ein Kreis schließt?)
4. Beantworten Sie die Teilaufgaben 2 und 3 für den Fall, dass der Eingabegraph gerichtet ist.

### Aufgabe 36

[4 Punkte]

1. Sind die nebenstehenden Graphen bipartit, d. h. 2-färbbar? Begründen Sie Ihre Behauptung.

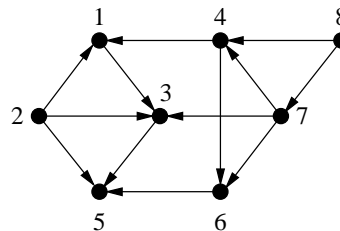


2. Zeigen Sie, dass ein Graph genau dann bipartit ist, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

### Aufgabe 37

[4 Punkte]

**Definition:** Eine *topologische Sortierung* eines gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Anordnung  $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})$  seiner Knoten  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , so dass für alle Kanten  $(v_j, v_k)$  gilt  $j < k$ .



1. Geben Sie eine topologische Sortierung der Knoten des obigen Graphen an.
2. Welchen Typ (bzgl. Eingangsgrad) besitzt der Knoten, der in der topologischen Sortierung der vorigen Teilaufgabe am Anfang steht? Warum muss das so sein?
3. Zeigen Sie, dass ein gerichteter Graph  $G$  genau dann eine topologische Sortierung besitzt, wenn er azyklisch, d. h. kreisfrei, ist.