Institut für Informatik
Komplexität und Kryptografie
Prof. Dr. Johannes Köbler

Sommersemester 2005
11. Mai 2005

# Theoretische Informatik 3

***3. Übung***

**Abgabe der schriftlichen Lösungen bis zum 3. Juni 2005**

**Aufgabe 19** [4 Punkte]

Gegeben sei die Relation

$$R = \{(0,1),(0,2),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}^*$$

auf der Menge $A = \{0,1,2,3,4,5\}$.

1. Begründen Sie, dass $R$ eine Ordnung ist und zeichnen Sie das zugehörige Hasse-Diagramm.
2. Geben Sie die maximalen, minimalen, größten und kleinsten Elemente von $A$ (bzgl. $R$) an.
3. Welche Teilmengen von $A$ besitzen kein Supremum bzw. Infimum (bzgl. $R$)?

**Aufgabe 20** [4 Punkte]

Zeigen Sie die folgende Behauptung: Besitzt in einer Ordnung $R$ jede zweielementige Teilmenge von $A$ ein Supremum, so auch jede endliche Teilmenge $A' = \{a_1, \ldots, a_k\}$ von $A$ und es gilt

$$\sup A' = \sup\{a_1, \sup\{a_2, \ldots \sup\{a_{k-1}, a_k\} \ldots\}\}.$$

**Aufgabe 21** [mündlich]

Sei $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ teilt } n\}$ und $R_n \subseteq A_n \times A_n$ die Teilbarkeitsrelation auf $A_n$, d. h. $xR_ny :\Leftrightarrow x|y$.

1. Zeigen Sie, dass $(A_n; R_n)$ eine Ordnung ist.
2. Zeichnen Sie die Hasse-Diagramme für $n = 2, 4, 6, 8, 12, 16$.
3. Begründen Sie, dass für beliebiges $2 \leq n \leq 23$ die Ordnung $(A_n, R_n)$ zu einer der sechs Ordnungen in der vorigen Teilaufgabe isomorph ist. Was gilt für $n = 24$?

**Aufgabe 22** [mündlich]

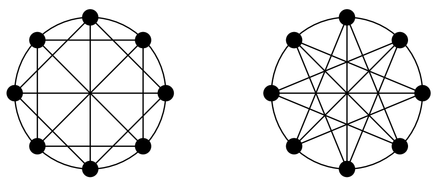
Sei $G$ ein Graph mit $n$ Knoten. Ein *Teilweg* $w'$ eines Weges $w$ ist ein Weg, der eine Teilfolge von $w$ ist, d. h. ist $w = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$, so besitzt $w'$ die Form $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$, für geeignete $i, j$ mit $1 \leq i \leq j \leq k$. Überprüfen Sie folgende Behauptungen:

1. Ein Weg der Länge größer als $n - 1$ in $G$ kann kein Pfad sein.
2. Jeder Weg in $G$, der kein Pfad ist und keine Kante mehrfach durchläuft, enthält einen Kreis als Teilweg.

**Aufgabe 23** [mündlich]

Das *Komplement* $\overline{G} = (V, E')$ eines Graphen $G = (V, E)$ besitzt dieselbe Knotenmenge wie $G$ und die Kantenmenge $E' = \binom{V}{2} - E$.

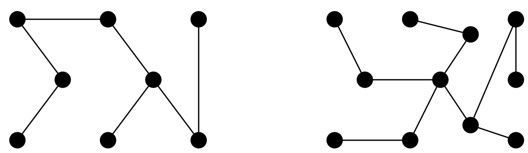
1. Wieviele Kanten besitzt $G$, wenn $G$ und $\overline{G}$ zueinander isomorph sind und jeweils $n$ Knoten besitzen. (Geben sie eine Begründung an.)
2. Zeigen Sie, dass zwei Graphen $G_1$ und $G_2$ genau dann zueinander isomorph sind, wenn ihre Komplemente $\overline{G_1}$ und $\overline{G_2}$ zueinander isomorph sind.
3. Sind die beiden dargestellten Graphen zueinander isomorph? Begründen Sie ihre Behauptung.



**Aufgabe 24** [mündlich]

Die *Exzentrizität* $e(v)$ eines Knotens $v$ in einem Graphen ist gleich der Länge des längsten Pfades, der bei $v$ endet. Das *Zentrum* eines Graphen besteht aus allen Knoten mit minimaler Exzentrizität.

1. Bestimmen Sie für die beiden im Folgenden abgebildeten Bäume die Exzentrizität aller Knoten und geben Sie jeweils das Zentrum an.



2. Von welchem Typ (Blatt oder innerer Knoten) sind die Knoten eines Baumes, die die größte Exzentrizität besitzen? Geben Sie eine Begründung an.
3. Beschreiben Sie (informal) einen effizienten Algorithmus, mit dem man das Zentrum eines Baumes bestimmen kann.

**Aufgabe 25** [2 Punkte]

Zeigen Sie, dass das Zentrum eines Baumes immer aus einem oder zwei benachbarten Knoten besteht.