Institut für Informatik
Komplexität und Kryptografie
Prof. Dr. Johannes Köbler

Sommersemester 2005
27. April 2005

Theoretische Informatik 3

2. Übung

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis zum 20. Mai 2005

Aufgabe 11 [mündlich]

Zeigen Sie:

1. $(R^T)^T = R$
2. $\overline{R}^T = \overline{R^T}$
3. $R \subseteq S \Leftrightarrow R^T \subseteq S^T$
4. $(R \cup S)^T = R^T \cup S^T$
5. $(\bigcup_{i\in I} R_i) \circ T = \bigcup_{i\in I}(R_i \circ T)$
6. $(\bigcap_{i\in I} R_i) \circ T \subseteq \bigcap_{i\in I}(R_i \circ T)$

Aufgabe 12 [mündlich]

Zeigen Sie:

1. Wenn die Relationen R und S reflexiv sind, dann sind auch die Relationen $R \cup S$ und $R \cap S$ reflexiv.
2. Wenn die Relationen R und S symmetrisch sind, dann sind auch die Relationen $R \cup S$ und $R \cap S$ symmetrisch.

Aufgabe 13 [4 Punkte]

Die symmetrische Hülle einer Relation R auf einer Menge A ist definiert durch

$$h_{sym}(R) := \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid R \subseteq S, S \text{ symmetrisch}\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $h_{sym}(R)$ symmetrisch (und somit die kleinste symmetrische Relation, die R enthält) ist.
2. Zeigen Sie, dass $h_{sym}(R) = R \cup R^T$ ist.

Aufgabe 14 [mündlich]

1. Bestimmen Sie die größte (bzgl. Mächtigkeit) symmetrische Relation, die in der Relation
$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,2)\}$$
(über $A = \{1, 2, 3, 4\}$) enthalten ist.
2. Muss jede Relation eine größte transitive Relation enthalten? Beweisen Sie ihre Behauptung.

Aufgabe 15 [4 Punkte]

1. Zeigen Sie: $R^+ = R \circ R^*$.
2. Sei R eine Relation auf einer n-elementigen Menge A. Zeigen Sie:

$$R^* = \bigcup_{i=0}^{n-1} R^i = \prod_{i=0}^{\lfloor \log(n-1) \rfloor} (Id \cup R^{2^i}),$$

wobei $\prod_{i=1}^{k} R_i = R_1 \circ \cdots \circ R_k$ für Relationen $R_1, \ldots, R_k$ auf A ist.

3. Zeigen Sie: R symmetrisch $\Rightarrow R^+, R^*$ symmetrisch.

Aufgabe 16 [mündlich]

Sind mit E_1, E_2 auch $E_1 \cap E_2, E_1 \cup E_2, E_1 \circ E_2$ Äquivalenzrelationen? Welche der drei Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität bleiben erhalten, welche nicht? Beweisen Sie ihre Behauptung.

Aufgabe 17 [4 Punkte]

Gegeben sei folgende Relation

$$R = \{(2,4), (3,3), (3,6), (4,1), (4,2), (5,9), (7,5), (7,8), (8,5), (9,8)\}$$

auf der Menge $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$. (Stellen Sie sich z.B. vor, 10 Personen wurden befragt, wer wen gut leiden kann.)

1. Welche der Eigenschaften Reflexivität, Irreflexivität, Symmetrie, Asymmetrie, Antisymmetrie und Transitivität liegen vor, welche nicht?
2. Veranschaulichen Sie die Relationen R, R^T, $h_{refl}(R)$, $h_{sym}(R)$, R^2, R^3, R^+, R^* durch die zugehörigen gerichteten Graphen.

Aufgabe 18 [mündlich]

1. Sei R eine binäre Relation auf der Menge A. Beschreiben Sie $h_{äq}(R)$ durch eine Kombination der Operatoren $h_{refl}(\cdot)$, $h_{sym}(\cdot)$, $(\cdot)^+$ und $(\cdot)^*$, wobei sie nicht alle Operatoren verwenden müssen. Geben Sie eine Begründung an.
2. Sei R eine transitive Relation. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$R^2 = \bigcup_{i=2}^{\infty} R^i$$

(Hinweis: Daraus folgt dann die Gleichung $R \cap \overline{R^2} = R \cap \overline{\bigcup_{i=2}^{\infty} R^i}$, d. h. bei Hasse-Diagrammen fehlen auch die Kanten, die zu Wegen der Länge größer als zwei korrespondieren, was durch die Definition ja nicht deutlich wird.)

3. Eine Relation R ist genau dann eine Ordnung auf A, wenn R^T eine Ordnung auf A ist. Beweisen Sie diese Aussage.