Übung 1.7.2020

(1) Lösen Sie das LOP (P) mit

$$(P)\ \max\left\{5x_1-2x_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 3x_1+x_2\le 7 \\ 4x_1-2x_2\le 3 \\ x_i\ge 0\ i\in[2] \end{array}\right\}$$

Falls ein opt. Pkt ex., bei dem mindestens eine der Koordinaten nicht Null ist, dann sollen sich x_1 und x_2 um mindestens 1 unterscheiden, wobei die 2. Koordinate nicht kleiner als die 1. sein darf.

Lsg: (1) Zuerst (P) lösen:

$x^{(1)}$

		x_1	x_2	Q
	0	−5	2	
u_1	7	3	1	7/3
← u_2	3	4	−2	3/4

$x^{(2)}$

		u_2	x_2
	15/4	5/4	−1/2
← u_1	19/4	−3/4	5/2
x_1	3/4	1/4	−1/2

$x^{(3)}$

		u_2	u_1
z	47/10	11/10	1/5
x_2	19/10	−3/10	2/5
x_1	17/10	1/10	1/5

- $x^{(3)}=\left(\frac{17}{10},\frac{19}{10}\right)^T$ ist optimal f. (P) mit $ZF(x^{(3)})=\frac{47}{10}$.
- Die Diff. $x_2-x_1=\frac{19}{10}-\frac{17}{10}=\frac{2}{7}\le 1$

(2) ——— $\Rightarrow$ Wir müssen nachoptimieren mit $x_2-x_1\ge 1$. (VNB)

Da x_1 u. x_2 BV sind, müssen wir sie zuerst als Funktionen der NBV berechnen und dann die VNB entspr. umschreiben

Aus der Tab. zu $x^{(3)}$ folgt:

$$x_2 = \frac{19}{10} - \left(-\frac{3}{10}u_2 + \frac{2}{5}u_1\right)$$

$$x_1 = \frac{17}{10} - \left(\frac{1}{10}u_2 + \frac{1}{5}u_1\right)$$

$$\Rightarrow \text{VNB}: 1 \le x_2 - x_1 = \frac{19}{10} + \frac{3}{10}u_2 - \frac{2}{5}u_1 - \frac{17}{10} + \frac{1}{10}u_2 + \frac{1}{5}u_1$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{5}u_2 - \frac{1}{5}u_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5} \le \frac{2}{5}u_2 - \frac{1}{5}u_1$$

$$\Leftrightarrow 4 \le -u_1 + 2u_2$$

$$\Leftrightarrow -u_1 + 2u_2 - u_3 = 4$$ mit $u_3 \geq 0$ als

$$\Leftrightarrow u_1 - 2u_2 + u_3 = -4$$ neue Schupfvar.

Wir fügen diese VNB als neue Zeile in der opt. ST und falls die so entst. ST nicht opt. ist, opt. wir weiter mit d. DSM:

$x^{(3)}$

		u_2	u_1
	$47/10$	$11/10$	$1/5$
x_2	$19/10$	$-3/10$	$2/5$
x_1	$17/10$	$1/10$	$1/5$
u_3	-4	-2	1

$x^{(4)}$

		u_3	u_1
	$5/2$	≥ 0	≥ 0
x_2	$5/2$		
x_1	$3/2$		
u_2	2	$-1/2$	$1/2$

Offenbar ist $x^{(4)} = (3/2, 5/2)^T$ jetzt optimal, die VNB gilt und $ZF(x^{(4)}) = \frac{5}{2}$ $\square$

(2) Lösen Sie (P) aus (1) mit der zus. Bedingung $x_i \in \mathbb{Z}$, $i \in [2]$. Sei die neue LOA $(\tilde{P})$

Lsg.: In diesem Fall ist (P) eine Relaxation von $(\tilde{P})$. Der opt. Pkt $x^{(3)}$ von (P) ist nicht ganzzahlig!

(a) Gomory-Schnitt für z:

$$\left(\frac{11}{10} - \underbrace{\left\lfloor \frac{11}{10} \right\rfloor}_{=1}\right) u_2 + \left(\frac{1}{5} - \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{5} \right\rfloor}_{=0}\right) u_1 \geq \frac{47}{10} - \underbrace{\left\lfloor \frac{47}{10} \right\rfloor}_{=4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} u_2 + \frac{1}{5} u_1 \geq \frac{7}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} u_2 + \frac{1}{5} u_1 - u_3 = \frac{7}{10}, \quad u_3 \geq 0.$$

Mit der letzten Gleichung mittels DSM nachoptimieren:

		u_2	$\downarrow$ u_1
	47/10	11/10	1/5
x_2	19/10	−3/10	2/5
x_1	17/10	1/10	1/5
$\leftarrow$ u_3	−7/10	−1/10	−1/5
Q		$\underbrace{\frac{11/10}{\lvert -1/10 \rvert}}_{=11}$	$\underbrace{\frac{1/5}{\lvert -1/5 \rvert}}_{1}$

$x^{(4)}$		u_2	u_3
	4	1	1
x_2	1/2	−1/2	2
x_1	1	0	1
u_1	7/2	1/2	−5

(b) Gomory-Schnitt für x_2:

$$\left(-\frac{1}{2} - \underbrace{\left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor}_{=-1}\right) u_2 + \left(2 - \underbrace{\lfloor 2 \rfloor}_{2}\right) u_3 \geq \frac{1}{2} - \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor}_{=0}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} u_2 \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad u_2 \geq 1 \Leftrightarrow u_2 - u_4 = 1 \ , \ u_4 \geq 0.$

$\Leftrightarrow -u_2 + u_4 = -1$

$\Rightarrow$

		$\downarrow$ u_2	u_3
	4	1	1
x_2	1/2	−1/2	2
x_1	1	0	1
u_1	7/2	1/2	−5
$\leftarrow$ u_4	−1	−1	0

$x^{(5)}$

		u_4	u_3
	3	1	1
x_2	1	−1/2	2
x_1	1	0	1
u_1	3	1/2	−5
u_2	1	1	0

$x^{(5)}$ mit $x^{(5)} = (1,1)^T$ und $ZF(x^{(5)}) = 3$

ist die Lösung der LOA $(\tilde{P})$ $\square$.