1. Übung (2.6.2020 – 7.6.2020)

1. Aufg.: Betr. wir die Abb.

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ mit}$$

$\langle u, w \rangle := u_1 \cdot w_1$ für bel. Elemente

u, w aus $\mathbb{R}^n$ mit $u = (u_1, \dots, u_n)^T$
$w = (w_1, \dots, w_n)^T$.

Ist diese Abb. ein SP?

Lsg.: Um zu überprüfen, ob diese Abb. ein SP in $\mathbb{R}^n$ definiert, müssen wir überprüfen, ob die Abb. die Eigenschaften eines SP genügt (vgl. Def. 1.1 aus d. Skript): Sei $u, w \in \mathbb{R}^n$ bel. $u^{(1)}, u^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ bel. $\lambda \in \mathbb{R}$ bel.

(a) $\langle u, w \rangle = u_1 \cdot w_1 = w_1 \cdot u_1 = \langle w, u \rangle$ ✓

(b) $\langle u^{(1)} + u^{(2)}, w \rangle = (u_1^{(1)} + u_1^{(2)}) \cdot w_1$

$= u_1^{(1)} \cdot w_1 + u_1^{(2)} \cdot w_1 =$

$= \langle u^{(1)}, w \rangle + \langle u^{(2)}, w \rangle$ ✓

(c) $\langle \lambda u, w \rangle = (\lambda u_1) \cdot w_1 = \lambda (u_1 \cdot w_1)$
$= \lambda \langle u, w \rangle$ ✓

(d) $\langle u, u \rangle = u_1^2 \geq 0$, aber es gilt nicht $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$, denn für $u^* := (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{(n-1)\times})$ gilt: $\langle u^*, u^* \rangle = 0$, aber $u^* \neq 0$.

Also ist diese Abb. kein SP □

Konvexe Mengen

Belv. zwei Pkte x_1, x_2 aus $\mathbb{R}^n$. Es gilt:

$$\operatorname{conv}\{x_1, x_2\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{array}{l} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{array} \right\}$$

Aus $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 1 - \lambda_1$

$$\Rightarrow \operatorname{conv}\{x_1, x_2\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{array}{l} x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \\ \lambda \in [0,1] \end{array} \right\}.$$

Das sind zwei offenbar äquivalente Schreibweisen für d. Verbindungsstrecke zweier Pkte.

2. Aufgabe: (a) Ist der Durchschnitt zweier konvexen Mengen konvex?

(b) Ist die Vereinigung zweier konvexen Mengen konvex?

Lsg: zu (a) Ja, denn seien M_1 und M_2 konvex. Behr. $M = M_1 \cap M_2$.

Sei $x \in M$ mit $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ für zwei bel. Pkte $x_1, x_2 \in M$ und $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ sonst bel.

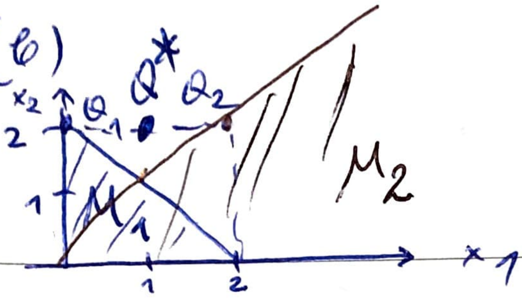
z.z.: $x \in M$.

Dann $x_i \in M \Rightarrow x_i \in M_1$ und $x_i \in M_2$ $i \in [2]$

Da M_1, M_2 konv. $\Rightarrow x \in M_1$ u. $x \in M_2$

Folglich gilt: $x \in M_1 \cap M_2 = M$ $\square$

zu (b)



Nein, denn

$M_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$

$M_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 \geq 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$

Sei $M := M_1 \cup M_2$. Betr. die zwei Pkte $Q_1 := (0,2)^T$ und $Q_2 := (2,2)^T$.

Es gilt: $Q_1 \in M_1$, $Q_2 \in M_2$ und damit sind Q_1 und Q_2 aus M.

Betr. $Q^* \in \operatorname{conv}\{Q_1, Q_2\}$ mit

$$Q^* = \underbrace{1/2}_{\lambda_1} \cdot Q_1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\lambda_2} Q_2 = \binom{1}{2}.$$

Offenbar aber genügt Q^* weder die Bedingungen von M_1 noch von M_2 und damit ist Q^* nicht aus M. □

3. Aufgabe

Sei (P) eine LOA mit

$$(P) \quad \max\left\{ 5 - 2x_1 + 6x_3 + x_4 \;\middle|\; \begin{aligned} x_1 + 3x_3 &\le 15 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_4 &\le 12 \\ x_i \geq 0 \text{ für } i &\in [4] \end{aligned} \right\}$$

Stellen Sie die 1. ST auf!

Lsg: $ZF = 5 - 2x_1 + 6x_3 + x_4$

$= 5 - (2x_1 + 0 \cdot x_2 - 6x_3 - x_4)$

und $x_1 + 3x_3 + u_1 = 15$

$2x_1 - 7x_2 + x_4 + u_2 = 12$

$x_i \geq 0,\ u_j \geq 0,\ i \in [4],\ j \in [2]$

			NBV			
			x_1	x_2	x_3	x_4
		5	2	0	-6	-1
BV	u_1	15	1	0	3	0
	u_2	12	2	-7	0	1

□