2. Übung 10.7.2020

1. Aufgabe: Lösen Sie mit dem SA folgende LOA:

$$(P)\quad \max\left\{2x_1 - 3x_3 - 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 4x_4 \le 3 \\ -x_2 + x_3 \ge -1 \\ 3x_1 - x_4 \le 6 \\ x_i \ge 0,\ i \in [4] \end{array}\right\}$$

Lsg: (1) Rechte Seite im Restriktionsbereich muss nicht-negativ sein, d.h. bei $A \cdot x = b$ muss $b \ge 0$ sein.

Deshalb wird die 2. Restriktion mit -1 multipliziert.

(2) $M \rightsquigarrow M'$

Damit erhalten wir:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_4 + u_1 = 3 \\ x_2 - x_3 + u_2 = 1 \\ 3x_1 - x_4 + u_3 = 6 \\ x_i \ge 0,\ u_j \ge 0,\ i \in [4],\ j \in [3] \end{cases}$$

ZF=2•x1-3•x3-1=
-1- (-2•x1 + 0•x2 + 3•x3 +0•x4)

$\Rightarrow$ BV: u_1, u_2, u_3
NBV: x_1, x_2, x_3, x_4

$x^{(0)}$		x_1	x_2	x_3	x_4	Q
	-1	-2	0	3	0	
u_1	3	1	-2	0	4	$3/1=3$
u_2	1	0	1	-1	0	
$\leftarrow u_3$	6	3	0	0	-1	$6/3=2$ - min

$x^{(1)}$

		u_3	x_2	x_3	x_4
	3	$2/3$	0	3	$-2/3$
$\leftarrow$ u_1	1	$-1/3$	-2	0	$13/3$
u_2	1	0	1	-1	0
x_1	2	$1/3$	0	0	$-1/3$

$x^{(2)}$

		u_3	x_2	x_3	u_1
	$41/13$	$8/13$	$-4/13$	3	$2/13$
x_4	$3/13$	$-1/13$	$-6/13$	0	$3/13$
$\leftarrow$ u_2	1	0	1	-1	0
x_1	$27/13$	$4/13$	$-2/13$	0	$1/13$

$x^{(3)}$

		u_3	u_2	x_3	u_1
	$45/13$	$8/13$	$4/13$	$35/13$	$2/13$
x_4	$9/13$		$6/13$		
x_2	1	0	1	-1	0
x_1	$29/13$		$2/13$		

Diese ST ist optimal, d.h. $x^{(3)}$ ist eine Lsg v. (P) mit
$x^{(3)} = \left(\frac{29}{13}, 1, 0, 9/13\right)^T$.

$ZF(x^{(3)}) = \frac{45}{13}$ $\square$

Bemerkung:

Betr. wir einen optimale SimplexTab. für eine bel. LOA, bei der in der Char. Zeile ein $d_{0\ell}$, $\ell \in N$ ex. mit $d_{0\ell} = 0$:

x^*

		x_ℓ
	d_{00}	$d_{0\ell} = 0$
x_p	...	$d_{p\ell}$

Alle $d_{0j} \geq 0$ für $j \in N$, denn x^* optimal mit $ZF(x^*) = d_{00}$.

Sei dabei $d_{p\ell} > 0$ für ein $p \in B$.
Dann kann man x_ℓ gegen x_p tauschen
(OBdA $\min\limits_{i \in B_+} \frac{d_{i0}}{d_{i\ell}} = \frac{d_{0p}}{d_{p\ell}}$)
Dabei ändert sich kein Wert in der char. Zeile, d.h. der neue PKTX bleibt optimal, und der Wert der ZF in $\tilde{x}$ ist auch d_{00}.

$\square$

2. Aufgabe

Zeigen Sie, dass wenn $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ optimale Pkte einer LOA (P) sind, so ist auch jeder Pkt aus $\text{conv}\{x^{(1)}, x^{(2)}\}$ auch optimal für (P).

Beweis: Seien $x^{(1)}, x^{(2)}$ opt. für eine LOA (P). Sei $\tilde{x}$ ein bel. Pkt aus der Verbindungsstrecke $\text{conv}\{x^{(1)}, x^{(2)}\}$, d.h.

$\tilde{x} = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}$ für das Paar $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

z.z.: $\tilde{x}$ opt. für (P).

g.z.z. $ZF(\tilde{x}) = \underbrace{ZF(x^{(1)})}_{=:V} \left(= ZF(x^{(2)})\right)$.

dazu: Betr. die ZF im Pkt $\tilde{x}$.
Sei OBdA die ZF von (P) folgende:

$ZF = \langle c, x \rangle$ für $c \in \mathbb{R}^n$.

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\langle c, \tilde{x} \rangle &= \langle c, \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} \rangle \\
&= \lambda_1 \langle c, x^{(1)} \rangle + \lambda_2 \langle c, x^{(2)} \rangle \\
&= \lambda_1 \cdot V + \lambda_2 \cdot V = \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{=1} \cdot V \\
&= V \quad \square
\end{aligned}$$

3. Aufgabe: Lösen Sie mit dem SA folg. LOA (P):

(P) $\max\{3x_2+7 \mid x_2 \leq 4,\ x_1 \leq 5,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

Lsg:

$x^{(0)}$

		x_1	x_2
	7	0	-3
u_1	4	0	1
u_2	5	1	0

$x^{(1)}$

		x_1	u_1
	19	0	3
x_2	4	0	1
u_2	5	1	0

Tab. opt, d.h. $x^{(1)}$ ist ein opt. Pkt für (P)

$x^{(2)}$

		u_2	u_1
	19	0	3
x_2	4	0	1
x_1	5	1	0

Tab. opt., d.h. $x^{(2)}$ opt. Pkt für (P)

$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Damit ist auch jeder Pkt $\tilde{x}$ mit

$\tilde{x} = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \cdot 5 \\ \lambda_1 \cdot 4 + \lambda_2 \cdot 4 \end{pmatrix}$ opt., für $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

% $= \begin{pmatrix} \lambda_2 \cdot 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ % □