Beispiel:

Lösen Sie folgende Lineare Optimierungsaufgabe:

(P)

$3x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Lösung:

Aus den Nebenbedingungen in (P) erhalten wir:

$$M_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 + u_1 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + u_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - u_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - u_4 = 1 \\ x_i \geq 0, u_j \geq 0. \end{cases}$$

Ein zulässiger Basispunkt ist nicht ohne weiteres angebbar bzw. es ist nicht ohne weiteres klar, ob $M = \emptyset$ ist. Deshalb führen wir die künstlichen Variablen y_1 und y_2 ein:

$$M_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + u_1 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + u_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - u_3 + y_1 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - u_4 + y_2 = 1 \\ x_i \geq 0, u_j \geq 0, y_r \geq 0. \end{cases}$$

Damit haben wir die Hilfsaufgabe H zu lösen, um festzustellen, ob $M = \emptyset$ oder $M \neq \emptyset$. Für den Fall, daß $M \neq \emptyset$ ist, werden wir auch einen zulässigen Basispunkt finden:

(H):

$\min\{y_1 + y_2 \mid M_2\}$

$=$

$-\max\{-y_1 - y_2 \mid M_2\}$

d.h. wir betrachten als (H)
(H) max {-y_1 - y_2 I M_2 }

Wir haben:

Basisvariablen: u_1, u_2, y_1, y_2

Nichtbasisvariablen: x_1, x_2, u_3, u_4

Weitere Vorbereitungen: Die Zielfunktion muß als Funktion der Nichtbasisvariablen dargestellt werden! !

Dazu:

$y_1 = 1 - (x_1 + x_2 - u_3)$

$y_2 = 1 - (2x_1 - x_2 - u_4)$

Damit ist:

$ZF = -(y_1 + y_2) =$

$= -\,(1 - (x_1 + x_2 - u_3) + 1 - (2x_1 - x_2 - u_4)) =$

$= -\,(1 - x_1 - x_2 + u_3 + 1 - 2x_1 + x_2 + u_4)) =$

$= -2 - (-3x_1 + u_3 + u_4)$, d.h.

$d_{00} = -2,\ d_{0,x_1} = -3,\ d_{0,x_2} = 0,\ d_{0,u_3} = 1,\ d_{0,u_4} = 1.$

Jetzt können wir das erste Simplextableau für (H) aufstellen:

BV

		x_1	x_2	u_3	u_4	Q
	-2	-3	0	1	1	
u_1	2	1	1	0	0	2
u_2	2	2	-1	0	-0	1
y_1	1	1	1	-1	0	1
y_2	1	**2**	-1	0	-1	1/2

		y_2	x_2	u_3	u_4	Q
	-1/2	3/2	-3/2	1	-1/2	
u_1	3/2	-1/2	3/2	0	1/2	1
u_2	1	-1	0	0	1	
y_1	1/2	-1/2	**3/2**	-1	1/2	1/3
x_1	1/2	1/2	-1/2	0	-1/2	

		y_2	y_1	u_3	u_4
	0	1	1	0	0
u_1	1	0	-1	1	0
u_2	1	-1	0	0	1
x_2	1/3	-1/3	2/3	-2/3	1/3
x_1	2/3	1/3	1/3	-1/3	-1/3

Dieses Tableau ist optimal und der Wert der Zielfunktion ist 0. Folglich ist $M \neq \emptyset$ und als zulässiger Basispunkt für die Originalaufgabe ergibt sich:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{u}_4 \\ \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \end{pmatrix} \in M_2, \text{ und damit } \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{u}_4 \end{pmatrix} \in M_1, \text{ d.h. } \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich:

Basisvariablen für die ursprüngliche Aufgabe: x_1, x_2, u_1, u_2,
Nichtbasisvariablen für die ursprüngliche Aufgabe: u_3, u_4.

Wir haben $\boxed{\text{ZF: } 3x_1 + 2x_2.}$

Damit das erste Tableau aufgestellt werden kann, müssen wir die Zielfunktion als Funktion der Nichtbasisvariablen darstellen:

$$-\tfrac{2}{3}u_3 + \tfrac{1}{3}u_4 + x_2 = \tfrac{1}{3} \Longrightarrow x_2 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}u_3 - \tfrac{1}{3}u_4$$

$$-\frac{1}{3}u_3 - \frac{1}{3}u_4 + x_1 = \frac{2}{3} \Longrightarrow x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4$$

Jetzt setzen wir x_1 und x_2 in die Zielfunktion ein:

$$ZF = 3x_1 + 2x_2 =$$

$$= 3\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4\right) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}u_3 - \frac{1}{3}u_4\right) =$$

$$= 2 + u_3 + u_4 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}u_3 - \frac{2}{3}u_4 =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{7}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4, \text{ d.h.}$$

$d_{00} = \frac{8}{3}$, $d_{0,u_3} = -\frac{7}{3}$, $d_{0,u_4} = -\frac{1}{3}$:

		u_3	u_4
	8/3	-7/3	-1/3
x_1	2/3	-1/3	-1/3
x_2	1/3	-2/3	1/3
u_1	1	1	0
u_2	1	0	1

		u_1	u_4
	5	7/3	-1/3
x_1	1	1/3	-1/3
x_2	1	2/3	1/3
u_3	1	1	0
u_2	1	0	1

		u_1	u_2
	16/3	7/3	1/3
x_1	4/3	1/3	1/3
x_2	2/3	2/3	-1/3
u_3	1	1	0
u_4	1	0	1

Offensichtlich ist dieses Tableau optimal, und es gilt:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \text{ ZF}=16/3.$$