Klausur
29. Juli 2016

(Teil Lineare Optimierung und Differentialgleichungen)

Aufgabe 1: 8+6+14=28 Punkte

(A) Sei

$$(P)\ \max\{\langle c, x\rangle \mid Ax = b, x \geq 0_n\}$$

eine LOA, wobei $x, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ mit $n \geq m$ und die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hat den Rang $rg(A) = m$. Sei weiterhin A_B eine Basismatrix von A mit $A = \big(A_B \mid A_N\big)$.

Beantworten Sie folgenden Fragen mit *ja* oder *nein*, wenn Sie die Antwort wissen und mit $\times$, wenn Sie die Antwort nicht wissen:

(a) Jeder für (P) zulässiger Punkt x mit $x \neq 0_n$ ist ein zulässiger Basispunkt für (P). *Antwort:*

(b) Falls der Punkt $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ein zulässiger Basispunkt für (P) ist, so enthält das zugehörige Simplextableau von (P) genau m Basisvariablen. *Antwort:*

(c) Falls der Punkt $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ein zulässiger Basispunkt für (P) ist, so enthält das zugehörige Simplextableau von (P) genau $\big(n - m\big)$ Basisvariablen. *Antwort:*

(d) Jede LOA hat mindestens einen optimalen Punkt. *Antwort:*

(e) Die Hilfsaufgabe einer beliebigen LOA hat immer eine Lösung. *Antwort:*

(f) Die lexikographische Simplexmethode stoppt immer in endlich vielen Schritten. *Antwort:*

(g) Zu jeder LOA (P) gehört auch eine duale LOA (D). *Antwort:*

(h) Jede max-LOA $\max\{\langle c, x\rangle \mid Ax = b, x \geq 0_n\}$ kann auch durch eine äquivalente min-LOA dargestellt werden. *Antwort:*

(B) Betrachten Sie die LOA

$$
\begin{aligned}
(P)\ \max\{2x_1 - 3x_2 \mid\ & 2x_1 - x_2 + 7x_3 \leq 12 \\
& x_1 + x_2 \geq 7 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}.
\end{aligned}
$$

Geben Sie die zu (P) duale LOA (D) an!
(C) Lösen Sie folgende Aufgabe mittels des Simplexalgorithmus und ggf. mittels Gomory-Schnitte:

$$
\begin{aligned}
(P)\ \max\{x_1 + 2x_2 \mid\ & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\
& -x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1 \leq 4 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \\
& x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: (2+2+2+2)+14=22 Punkte

(A) Geben Sie in der untenstehenden Tabelle die Eigenschaften der folgenden Differentialgleichungen an:

(a) $2xy + x^2y' = 0$,

(b) $y''' + 2y'' - 5y' + 3y + 2 = 0$,

(c) $y(1 + xy) - xy' = 0$.

Tragen Sie *ja* ein, falls die ensprechende Differentialgleichung die Eigenschaft erfüllt, *nein*, falls die ensprechende Differentialgleichung sie nicht erfüllt und *0*, falls die Eigenschaft für die Differentialgleichung in der Vorlesung nicht definiert wurde. Bei *Ordnung* tragen Sie diese entsprechend ein. Falls Sie die Antwort nicht wissen, tragen Sie $\times$ ein.

Nr.	Eigenschaft	(a)	(b)	(c)
1.	*Ordnung*			
2.	*linear*			
3.	*konstante Koeffizienten*			
4.	*homogen*			

(B) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$xy' + y = 4x^3 - 2x^2 \quad \text{mit} \quad y(1) = 3.$$